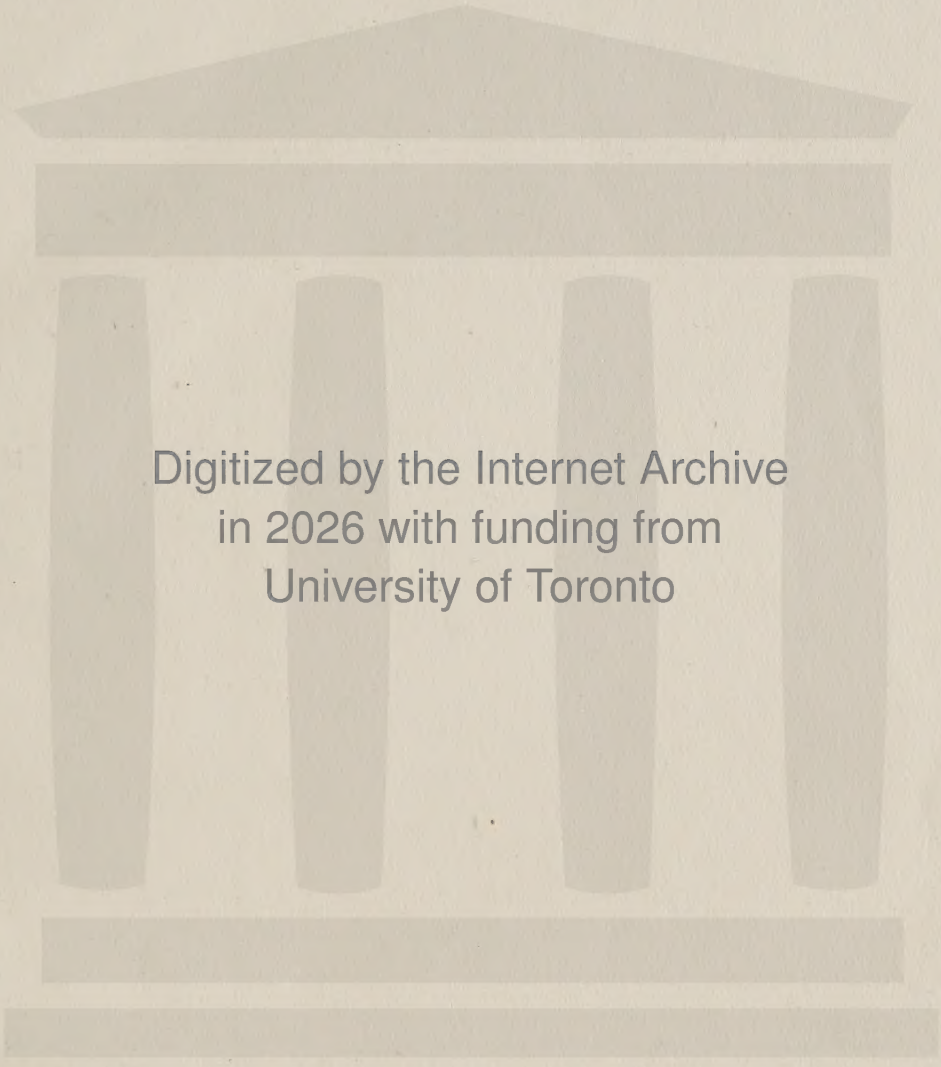
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST SEP 15 1927



Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/coursdastronomie1926faye

COURS
D'ASTRONOMIE
ET DE GÉODÉSIE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.
76837-25

stron.
F.

COURS
D'ASTRONOMIE
ET DE GÉODÉSIE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Par H. FAYE,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

REVU ET MIS A JOUR

Par le Général R. BOURGEOIS,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes,
Professeur à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE — APPLICATION A LA NAVIGATION
THÉORIE DES ERREURS
GÉODÉSIE — GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

Premier fascicule

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE — THÉORIE DES ERREURS
NAVIGATION

21746
10.6.27

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Le Cours de l'École Polytechnique ne comprend qu'une trentaine de séances, dans lesquelles il faut exposer l'Astronomie sphérique, la théorie des instruments, celle des erreurs, l'Astronomie solaire, la théorie des planètes et des comètes, celle de la Lune, et l'application de cette science si vaste à la Géodésie, à la Géographie et à la Navigation. Pour traiter convenablement ces parties essentielles, on a dû sacrifier l'Astronomie sidérale et l'Astronomie physique, ma'gré le vif intérêt que ces branches dérivées de la science mère présentent aujourd'hui. L'enseignement supérieur, donné dans nos Facultés, se mouvant dans les mêmes limites, j'ai cru qu'un Livre ainsi restreint aux parties essentielles serait utile à tous les étudiants. Il contient d'ailleurs tout ce qu'il faut pour mettre le lecteur en état d'aborder des études plus approfondies et plus complètes.

Mais j'ai dû penser aussi à ceux qui n'iront pas au delà de ces programmes. C'est pourquoi je me suis attaché à la filiation historique des idées et des découvertes. L'Astronomie est la plus vieille des sciences; son passé remonte, par d'authentiques documents encore utilisés aujourd'hui, à près de trois mille ans, et son histoire, depuis les premiers âges jusqu'aux temps modernes, offre une série de phases parallèles au développement séculaire de l'esprit humain. C'est pour elle que la Géométrie est née;

c'est pour ses exigences que l'Analyse moderne a été créée avec ses puissantes ressources; elle offre les premiers bégayements de la Mécanique et aussi ses plus beaux développements; enfin, c'est là qu'il faut chercher et apprendre la véritable méthode scientifique. Il m'a donc semblé que je ne devais pas suivre ici le mode d'exposition plus rapide qui convient aux sciences de pur raisonnement ou aux sciences d'observation nées d'hier.

J'ai été conduit ainsi à allonger cet Ouvrage et finalement à lui donner deux Volumes, sans pour cela le faire sortir du cadre primitif.

Ce premier Volume contient l'Astronomie sphérique, c'est-à-dire l'étude du mouvement diurne de la Terre, la description des instruments et des observatoires, la théorie des erreurs, dont les utiles méthodes ne sont pas assez connues chez nous, la Géodésie, science toute française que tous les peuples civilisés s'attachent aujourd'hui à développer, enfin la Géographie mathématique. Le second Volume traite de l'Astronomie solaire, des planètes, des comètes, de la Lune et des applications à la Navigation.

H. Faye.

PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION.

La première édition du Cours d'Astronomie et de Géodésie de l'École Polytechnique, par H. Faye, date de 1881. Depuis cette époque, bien des progrès ont été réalisés dans ces deux sciences, en Géodésie surtout. Nous nous bornerons à signaler, entre autres, l'emploi du métal invar dans les appareils de mesure des bases et celui de la télégraphie sans fil dans les déterminations de différences de longitude qui ont apporté dans ces opérations si délicates de telles simplifications qu'elles les ont pour ainsi dire entièrement transformées. De grands travaux ont été entrepris pour la mesure d'arcs de méridien et d'arcs obliques sous l'équateur aux pôles et sous les latitudes moyennes; les observations d'intensité de la pesanteur se sont développées; les stations géodésiques où l'on a déterminé les coordonnées astronomiques se sont multipliées, et tout cet ensemble a ouvert la voie à des études nouvelles sur la forme et la constitution du géoïde.

Il était donc nécessaire que, sans entrer dans les détails qui ne trouveraient place que dans un traité complet, le Cours actuel de l'École Polytechnique donnât aux élèves, tout au moins une idée des instruments, des méthodes et des théories nouvelles. C'est ce qui se fait, du reste, au cours des leçons. On a cru utile d'étendre quelque peu dans l'Ouvrage certains exposés qui sont forcément donnés à l'amphithéâtre sous une forme succincte, de façon à

permettre à ceux qui voudront ultérieurement pousser plus loin leurs connaissances d'avoir une base de départ suffisante.

Le programme de la partie du Cours qui traite de l'Astronomie générale n'a guère subi de changement depuis 1881, à part quelques notions sur la prédiction des marées par l'analyse harmonique. Nous avons eu, toutefois, à modifier assez profondément l'exposé de certaines questions, de façon à être davantage en concordance avec l'enseignement donné à l'École par les successeurs immédiats de M. Faye, MM. Callandreau et Henri Poincaré.

Par contre, une science nouvelle, l'Astronomie physique, a pris, depuis 1881, un essor considérable. Aujourd'hui déjà, grâce aux ressources que lui procure l'analyse spectrale, elle nous permet d'avoir, sur la constitution générale de l'Univers, des notions qui étaient inconnues il y a un demi-siècle. Nous avons donc jugé indispensable de donner un développement suffisant à cette partie de la science astronomique, qui fait, du reste, l'objet de deux leçons du Cours.

La mise à jour que nous avons entreprise, en nous ramenant à près d'un demi-siècle en arrière, nous a fait revivre le temps où nous suivions les leçons de notre éminent professeur d'Astronomie et de Géodésie. En relisant son Cours, nous avons retrouvé ses qualités maîtresses de méthode et de clarté d'exposition. Quand on écoutait Faye, les questions les plus difficiles et les plus compliquées devenaient simples. On devinait aussi, à le voir et à l'entendre, combien lui était chère la situation de professeur qu'il occupait à l'École. Aussi, tous ceux qui ont suivi son enseignement n'ont-ils jamais perdu son souvenir et nous sommes certain qu'ils seront heureux de trouver ici ce témoignage, venant de celui qui, après avoir été son élève à l'École, puis son collaborateur à l'Association géodésique internationale, a eu le grand honneur d'être un de ses successeurs dans la chaire d'Astronomie et de Géodésie de l'École Polytechnique.

Nous avons fait tous nos efforts pour conserver dans les parties nouvelles de cette seconde édition la clarté qu'avait mise dans son Ouvrage notre ancien maître ; notre désir le plus ardent serait d'y avoir réussi.

Enfin, nous nous faisons un devoir de remercier M. Charles Alphand, d'avoir bien voulu nous faire donner par sa mère, M^me^ Paul Decauville, fille de M. H. Faye, l'autorisation de publier cette nouvelle édition. Que M. Ch. Alphand veuille bien trouver ici l'expression du souvenir fidèle que je garde à ceux des siens qui ont disparu.

Général Bourgeois,
Membre de l'Institut.

SYMBOLES ET CONVENTIONS.

Coordonnées horaires des astres : $\mathcal{H}$, δ.

$\mathcal{H}$, angle horaire compté de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens du mouvement diurne du ciel (vers l'ouest), à partir de la région supérieure et australe du méridien local.

δ, distance polaire, comptée de 0° à 180°, à partir du pôle nord, en tout climat.

Coordonnées zénithales : A, z.

A, azimut astronomique ou géodésique, compté, en tout climat, de 0° à 360° à partir du point S. de l'horizon, dans le sens S.-O.-N.-E.

z, distance zénithale, comptée de 0° à 180°, à partir du zénith.

z_1, distance zénithale apparente, affectée de la réfraction.

Mesure du temps.

H, heure sidérale du lieu, comptée de 0^h à 24^h à partir de l'instant du passage du point γ au méridien du lieu.

γ, point vernal, nœud ascendant de l'écliptique sur l'équateur.

H_p, heure sidérale à Paris (ou au méridien origine).

μ, marche ou retard diurne de la pendule.

C_p, correction ou état de la pendule à un instant déterminé.

Coordonnées géographiques.

L, longitude du lieu, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens direct (vers l'est), à partir du méridien de Paris.

λ, colatitude du lieu, comptée en tout climat à partir du pôle nord, de 0° à 180°.

Coordonnées uranographiques.

$\mathcal{R}$, ascension droite d'un astre, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens direct (vers l'est), à partir du méridien céleste du point.

δ, distance angulaire d'une étoile au pôle nord, comptée, comme plus haut, de 0° à 180°.

Théorie des erreurs.

n, nombre des observations.
ε, erreur moyenne d'une observation.
r_1, erreur probable.
h, mesure du degré de précision d'une série d'observations.
p, poids d'une observation.

Coordonnées géodésiques.

r, rayon de la Terre supposée sphérique.
a, demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre.
e, excentricité du méridien.
μ, aplatissement.
ψ, angle de la verticale d'un lieu avec le rayon de l'ellipsoïde terrestre ρ.
N, grande normale.
R, rayon de courbure du méridien.
A, B, C, angles dièdres des triangles sphériques.
a, b, c, côtés géodésiques.
ν, angle au centre correspondant à un de ces côtés.

Symboles mathématiques.

log, logarithme ordinaire.
L ou £, logarithme népérien.
n, mis après un logarithme, rappelle que le nombre correspondant doit être pris avec le signe —.
e, base des logarithmes népériens.
φ, angle auxiliaire.
∂, symbole qui remplace d dans les expressions différentielles, lorsqu'on donne à celles-ci des valeurs très petites, mais finies.

Doubles emplois.

e, excentricité dans les cercles divisés; excentricité de l'ellipse terrestre; base des logarithmes népériens.
ρ, réfraction astronomique ou géodésique; rayon local de l'ellipsoïde terrestre.

COURS

D'ASTRONOMIE

INTRODUCTION.

Distinction fondamentale entre le monde solaire et l'univers.

Les étoiles que nous voyons briller au ciel sont de vrais soleils comme le nôtre, c'est-à-dire des globes considérables, sièges d'une vive incandescence et animés de mouvements divers. Le Soleil n'a rien qui le différencie physiquement des étoiles innombrables dont l'espace indéfini est peuplé, mais, pour nous, il a cela de particulier que nous lui appartenons; il est le centre d'un groupe de petits corps obscurs et froids parmi lesquels notre globe, la Terre, occupe son rang; ces globes reçoivent de lui la lumière et la chaleur; ils l'accompagnent dans son mouvement de translation. L'ensemble des étoiles ou des soleils est l'univers, ou tout au moins une de ses parties ; le petit groupe dont nous venons de parler, avec l'étoile qui lui sert de centre, est le monde solaire. L'ensemble de l'univers forme probablement un tout dont les limites nous échappent; s'il est régi par des lois, celles-ci commencent à peine à être entrevues; il faudra encore bien des années, des siècles peut-être, pour que l'esprit humain s'élève complètement jusqu'à elles. Le monde solaire, au contraire, est un tout limité, bien circonscrit; par sa simplicité, par une heureuse réunion de circonstances favorables, ses mouvements intérieurs sont accessibles à l'analyse : l'étude de ces mouvements est un simple pro-

blème de Mécanique et ce problème a été si complètement résolu que l'Astronomie est aujourd'hui en possession non seulement de se représenter fidèlement ses états antérieurs, mais encore de prédire avec une précision singulière son état futur à une date quelconque. L'Astronomie sidérale, qui traite des étoiles, de leur distribution dans l'espace, de leur groupement plus ou moins arbitraire en constellations, de leurs mouvements propres, de leur éclat, et même de leur constitution chimique au moyen du spectroscope, est une science qui se développe aujourd'hui d'une façon très active, dont les résultats, bien qu'il reste encore énormément à faire, sont déjà importants. Par contre, l'Astronomie proprement dite, celle du monde solaire, est, nous le répétons, une science achevée, digne de servir de modèle aux autres sciences. C'est pourquoi son étude est utile, non seulement pour les applications qu'on en fait chaque jour aux besoins de la société, mais encore à un point de vue plus général, en ce qu'elle donne la vraie mesure de ce que peut l'esprit humain quand il s'attaque à un problème nettement circonscrit comme notre petit monde.

Cette étude, ainsi comprise, date de trois siècles à peine.

L'antiquité se faisait une tout autre idée des choses. C'est qu'elle avait à surmonter et qu'elle n'a pas su résoudre une difficulté inévitable, tenant à ce que l'observateur est incorporé pour ainsi dire au petit ensemble dont il fait partie. Placé près du Soleil et à une distance immense des autres étoiles, il lui a été longtemps impossible de saisir leur intime analogie. Les planètes, qui circulent comme la Terre autour du Soleil et ne brillent que de sa lumière, lui faisaient l'effet d'étoiles comme les autres. Enfin, l'observateur terrestre participe à tous les mouvements de la Terre ; mais, comme il n'a pas de sens particulier qui l'en avertisse, il les a niés tout d'abord avec la plus intime conviction et a débuté, en Astronomie, par attribuer ses propres mouvements aux astres qui l'entourent.

En revanche, la circonstance principale qui a permis de pousser si loin l'étude du monde solaire, c'est son indépendance presque absolue vis-à-vis du reste de l'univers, notion toute moderne sur laquelle nous aurons occasion de revenir. Quand on n'a en vue que ses mouvements intérieurs, tout se passe, en effet, comme si les autres soleils, les autres mondes, les autres systèmes stellaires

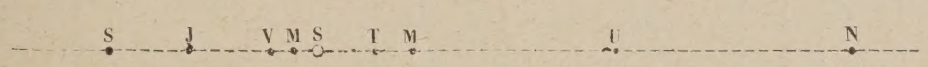
n'existaient pas. C'est ce que nous allons faire voir en transportant l'observateur hors du système solaire pour le lui faire embrasser d'un coup d'œil et lui donner en même temps une idée de l'énorme distance qui le sépare des astres les plus voisins; ensuite nous replacerons l'observateur sur le globe terrestre et nous analyserons les impressions bien différentes que le même spectacle fera alors sur lui.

Le système solaire vu de dehors.

La figure 4 représente cet ensemble vu de face à l'échelle de $\frac{1}{60.000.000.000.000}$. Le Soleil est marqué au centre par un simple point, car ses dimensions sont évanouissantes à cette échelle. Autour de lui circulent 8 planètes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et, entre Mars et Jupiter, 979 petites planètes qui ont été découvertes successivement de 1801, date de la première découverte, jusqu'en 1925.

Toutes ces planètes circulent de droite à gauche dans des plans peu inclinés les uns sur les autres, en sorte que, si l'on regardait cet ensemble par la tranche, on verrait à un moment donné les

Fig. 1.



planètes distribuées à droite et à gauche du Soleil, presque en ligne droite (*fig.* 1).

Ces orbites, sauf celles des petites planètes, sont séparées les unes des autres par des intervalles croissants.

Nous avons dit que ce système présentait une disposition intérieure favorable à l'application de l'Analyse. Ces circonstances favorables sont :

1° La prédominance du corps central. Nous verrons, en effet, que la force qui règle ces mouvements est proportionnelle aux masses, et que celles des planètes sont le plus souvent négligeables;

2° Les grandes distances qui séparent les orbites l'une de l'autre. Nous verrons, en effet, que cette force varie en raison inverse du carré des distances, en sorte que les actions mutuelles des pla-

nètes, déjà si faibles à cause de leurs masses insignifiantes, sont encore affaiblies par leurs grandes distances;

3° Le sens de leurs mouvements, qui est le même pour tous, la presque parfaite circularité de leurs orbites et leur faible inclinaison mutuelle sont des circonstances éminemment favorables;

4° Enfin, et surtout, l'indépendance presque absolue par rapport au reste de l'univers. Pour s'en faire une idée, il faudrait marquer, sur le plan du système solaire (*fig.* 4), les étoiles les plus rapprochées de nous. Imaginons que la feuille de papier sur laquelle a été tracé ce plan soit prolongée de 2400^m en tous sens : ce sera seulement à l'extrême bord de cette énorme feuille qu'on commencera à marquer une vingtaine d'étoiles, les plus voisines de nous. Il est aisé d'en apprécier l'action sur notre système. Elle est proportionnelle à leur masse et en raison inverse du carré de la distance. Or, l'attraction de notre Soleil sur la Terre, placée si près de lui, se réduit à lui imprimer en une seconde une accélération de $0^m,006$. Cette même force, agissant sur une des étoiles les plus voisines, placée un million de fois plus loin, lui imprimerait une vitesse égale à

$$\frac{0^m,006}{10^{12}}.$$

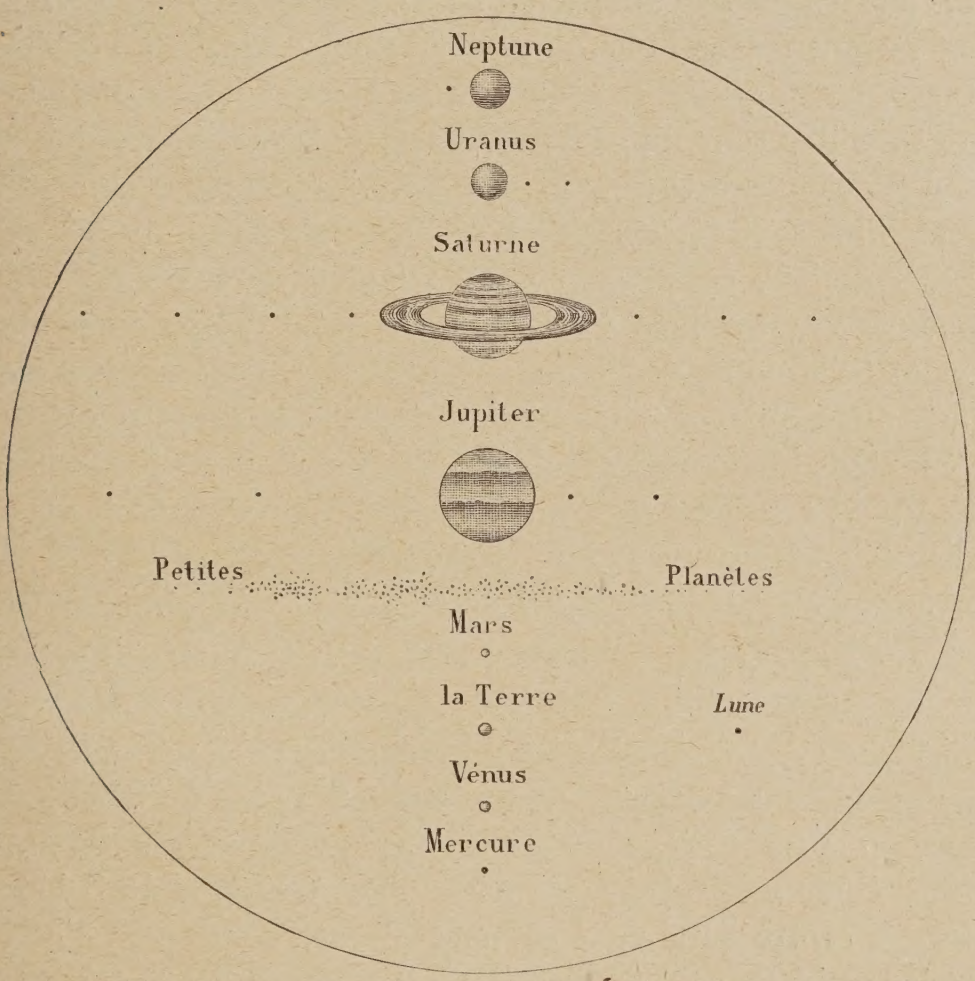
Réciproquement, cette étoile, en lui supposant une masse égale à celle du Soleil, communiquerait une accélération de même grandeur à notre système. Mais un mouvement commun à tous les membres de ce système ne saurait altérer leurs mouvements relatifs, les seuls que nous ayons intérêt à connaître. Ce n'est donc que par la différence des actions que l'étoile étrangère exerce sur ces différents membres qu'elle pourrait en troubler le système. Cette différence d'action, cette force perturbatrice, est bien proportionnelle à la masse troublante, mais, ainsi que nous le verrons plus tard, elle varie en raison du cube de la distance. Il faudrait donc mettre au dénominateur de l'expression précédente le cube de 1 000 000, c'est-à-dire 10^{18}. A la vérité, il s'agit d'un nombre énorme d'étoiles et non d'une étoile unique; mais ces étoiles sont à des distances très différentes; la plupart d'entre elles sont probablement dix et même cent fois plus éloignées que celle sur laquelle nous venons de raisonner.

Concluons que, dans l'étude de notre monde, on est parfaite-

ment en droit de faire abstraction de l'univers. Du reste, la distance qui sépare les étoiles entre elles est du même ordre, en général, que celle qui nous en sépare nous-mêmes, en sorte que les petits systèmes qui pourraient exister au loin, autour d'elles, jouiraient de la même indépendance.

Continuons l'examen des mouvements intérieurs de notre système. Toutes les grandes planètes, sauf Vénus et Mercure, sont accompagnées de satellites circulant autour d'elles et retenues par l'attraction de la planète centrale. Ce sont de vraies miniatures du système formé par les planètes autour du Soleil. Pour donner une idée des grandeurs relatives de ces mondes partiels, on a

Fig. 2.



représenté dans la figure 2 le disque entier du Soleil, et à l'intérieur, à la même échelle, on a figuré les planètes et leurs satellites, ainsi que l'essaim des petites planètes (au nombre de 979 actuel-

lement) qui circulent entre les orbites de Mars et de Jupiter. Ces satellites, tout en circulant autour de leurs planètes respectives, les accompagnent dans leur mouvement de révolution autour du Soleil. Cette figure montre combien ces petits systèmes secondaires sont insignifiants vis-à-vis du monde solaire dont ils font partie.

Le Soleil tourne autour d'un certain axe perpendiculaire, à quelques degrés près, au plan général du système solaire. Le sens de cette rotation est le même que celui de la circulation de toutes ces planètes, c'est-à-dire direct.

Les planètes tournent aussi sur elles-mêmes, et leurs satellites circulent autour d'elles dans le même sens. Mais ici il faut remarquer une singulière anomalie. Le système solaire se divise en deux régions : dans l'une, l'intérieure, qui va jusqu'à l'orbite de Saturne, les rotations de toutes les planètes et les circulations de leurs satellites sont directes; dans l'autre, l'extérieure, qui comprend les orbites d'Uranus et de Neptune, toutes les circulations de satellites sont rétrogrades.

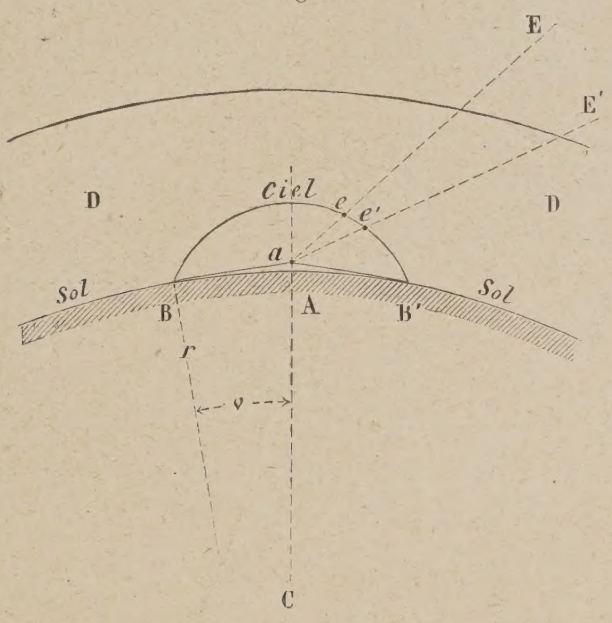
Les rotations sont d'une grande lenteur; il n'en est pas de même des vitesses linéaires de circulation. La Terre, par exemple, se meut à raison de 7,4 lieues par seconde. On comprend d'abord difficilement qu'avec une pareille vitesse, la faible attraction centrale du Soleil la maintienne dans son orbite à peu près circulaire; mais si l'on considère que le rayon de ce cercle est de 37 000 000 de lieues, on trouvera que la force centrifuge provenant de cette circulation, c'est-à-dire $\frac{V^2}{R}$, se réduit à $\frac{57}{37.000.000}$ exprimée en lieues ou à 0^m, 006 environ, et qu'elle est parfaitement équilibrée par l'attraction du Soleil.

Ainsi, le système solaire est un ensemble de corps obéissant à leurs attractions mutuelles, parmi lesquelles celle du Soleil est de beaucoup la force prépondérante. Tous ces corps circulent autour de leur commun centre de gravité, placé très près du Soleil; en outre, ce centre de gravité se meut lui-même en vertu d'actions extérieures inconnues. Sa direction et sa vitesse sont encore assez imparfaitement connues; on sait seulement qu'il marche avec son cortège de planètes, à une vitesse d'environ 20^{km} par seconde, vers la région de l'espace où se trouve un groupe d'étoiles formant la constellation d'Hercule.

Le système solaire vu de la Terre.

Replaçons maintenant l'observateur sur son globe. Il ne le verra plus, comme tout à l'heure, sous la forme d'une boule dont son regard embrassait une moitié entière; son contour apparent sera déterminé par le cercle de contact d'un cône circonscrit à ce globe et ayant son sommet à l'œil du spectateur; mais ce cône se réduit presque à un plan, et la partie visible à un élément circulaire de la surface. Soient (*fig.* 3) $Aa = h$ la hauteur de l'œil.

Fig. 3.



BAB′ une section centrale de la Terre, aB, aB′ deux tangentes issues du point a; Ba C sera l'angle du cône, complément de l'angle au centre φ, et l'on aura, en désignant par r le rayon CB ou CA,

$$(r + h)\cos\varphi = r,$$

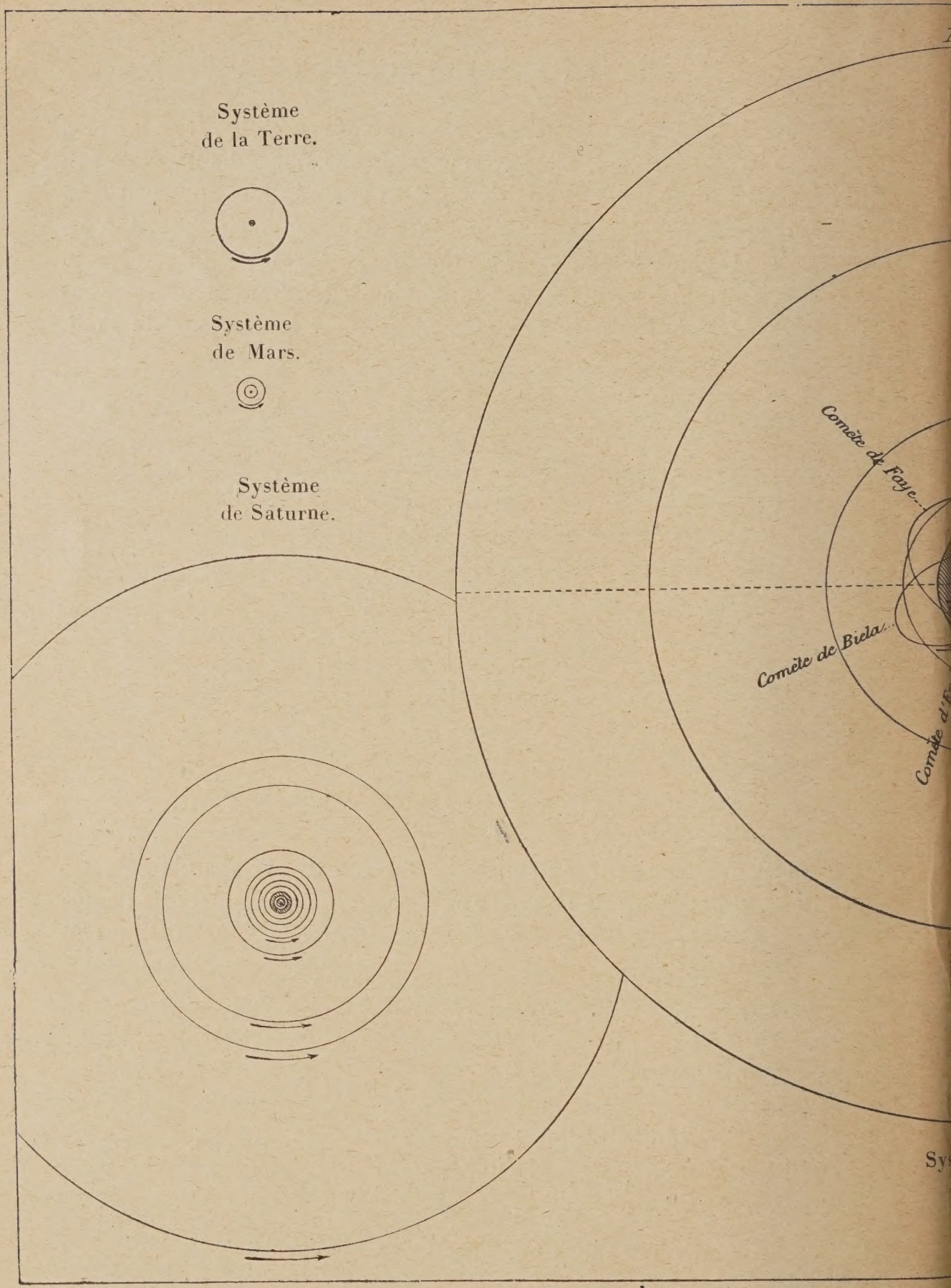
d'où

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r + h}},$$

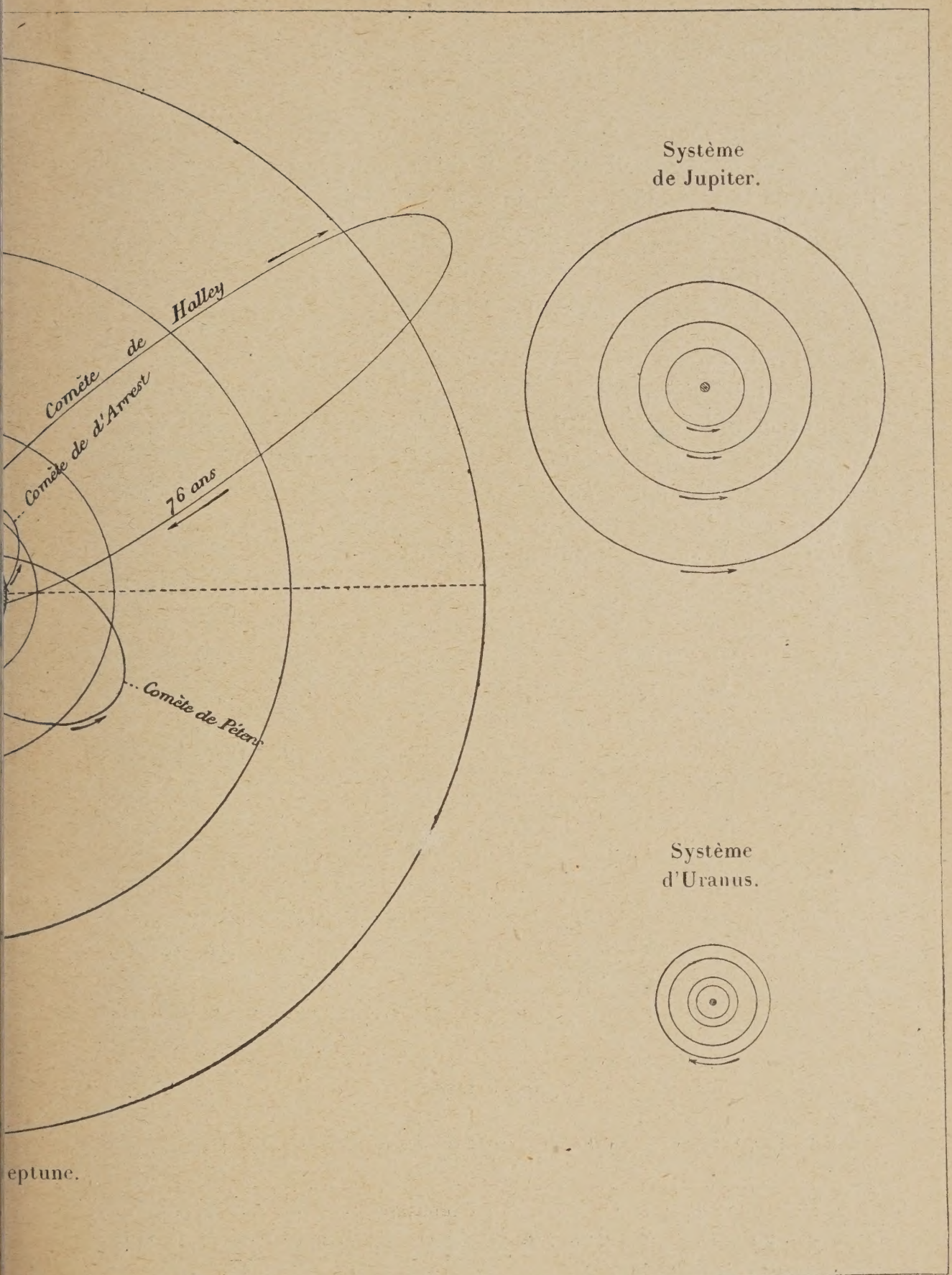
expression qui se réduit à

$$\varphi = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

en remplaçant le sinus par l'arc et en négligeant h vis-à-vis de r



SYSTÈME SOLAIRE. — Orbites



nètes et des comètes périodiques.

au dénominateur. Par suite,

$$\text{arc AB} = rv = \sqrt{2hr}.$$

Pour tenir compte de la réfraction atmosphérique qui courbe légèrement le rayon visuel AB, il suffit, comme on le verra par l'étude de la réfraction géodésique, d'introduire sous le radical le facteur $\frac{8}{7}$, et, comme $r = 6366^{km}$, on aura finalement, h étant donné en mètres,

$$\text{arc AB} = 3800^{m}\sqrt{h}.$$

Ainsi, l'œil étant à $1^{m}, 75$ au-dessus de la surface de la Terre, ce qui est la taille moyenne d'un homme, le rayon sphérique du cercle de contact qui comprend dans son intérieur la partie visible de cette surface se réduit à une lieue un quart (1). Ce cercle de contact prend le nom d'*horizon*. On voit que son plan se confond presque avec le plan tangent en A, ou même avec le plan horizontal passant par l'œil de l'observateur.

Une autre conséquence, c'est que la moitié à peu près de l'univers sera masquée par l'opacité du globe terrestre; l'observateur ne verra que les astres situés en dehors du cône circonscrit ou, si l'on veut, au-dessus de son horizon. Le plan de l'horizon et le prolongement Aa du rayon perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire la verticale de l'observateur, jouent un grand rôle en Astronomie. Comme la Terre est à très peu près sphérique, la résultante des attractions que toutes ses parties exercent sur un point quelconque de sa surface passe sensiblement par le centre et se confond avec un rayon; par conséquent, en chaque point, la direction de la pesanteur, si facile à obtenir par un fil à plomb, donne la verticale ou la direction du centre. La surface des eaux tranquilles devant être, pour l'équilibre, normale à la direction de la pesanteur, cette surface donne en chaque lieu le plan de l'horizon.

Voûte céleste.

Mais le globe terrestre est entouré d'une atmosphère gazeuse,

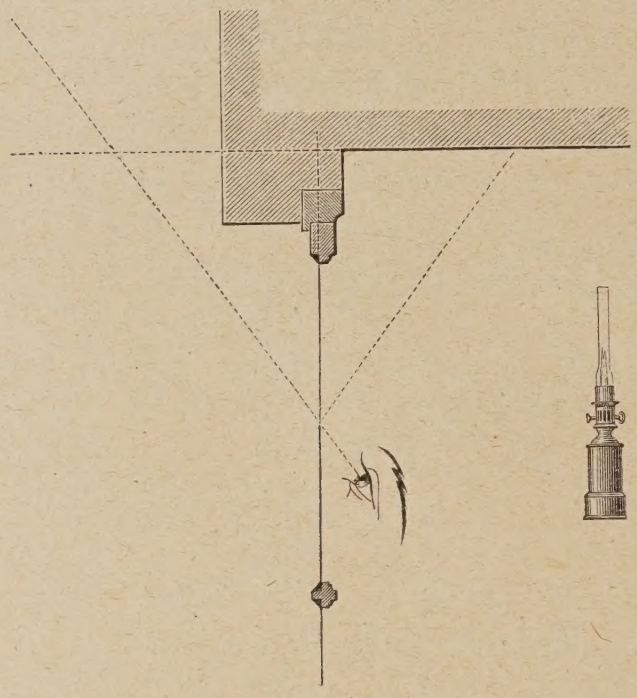
(1) Les accidents du sol et surtout les montagnes se voient de beaucoup plus loin; il n'est question ici que de la surface géométrique de la Terre, telle qu'on la perçoit en pleine mer.

transparente, à travers laquelle les rayons de lumière doivent passer pour arriver jusqu'à nous. L'interposition de cette atmosphère donne naissance à un remarquable effet de perspective aérienne. Les gaz ne sont pas d'une transparence absolue; ce défaut est encore singulièrement augmenté par les poussières de toutes sortes, solides ou aqueuses, que les couches les plus basses tiennent en suspension. Ces particules opaques réfléchissent en tous sens la lumière du Soleil et forment la lumière diffuse; celle-ci pénètre partout, produisant un éclairement général sans lequel nous tomberions dans une obscurité absolue dès que nous ne recevons plus les rayons directs du Soleil. Il y a plus : ces particules opaques, bien que disséminées, forment par leur ensemble un véritable fond de tableau B*ee'* B′ (*fig.* 3), sur lequel tous les objets, tels que E, E′, ... dont nos yeux ne peuvent apprécier la distance, vont se peindre en *e*, *e'*, ... comme s'ils y étaient attachés. Ce fond de tableau, purement atmosphérique, a la forme d'une calotte sphérique aplatie, dont l'axe vertical aboutit à l'œil du spectateur en *a*, et dont la base semble coïncider avec le cercle de l'horizon dont le diamètre est BB′. Sa couleur est bleue comme celle de l'air vu par transmission sur une grande épaisseur. Même la nuit, la faible clarté qui tombe des étoiles et la lumière qui vient par réflexion multiple des portions encore éclairées de notre atmosphère suffisent pour maintenir cette apparence. C'est ce qu'on appelle le *ciel*. Chaque spectateur a son ciel et son horizon qui le suivent partout où il se transporte sur le globe.

On reproduit aisément ce phénomène par l'expérience suivante (*fig.* 5). Dans une chambre faiblement éclairée par une lampe, pendant la nuit, regardez le ciel à travers une des vitres de la fenêtre. Le plafond se réfléchira sur cette vitre faisant office de miroir et formera extérieurement une image symétrique du plafond, qui apparaîtra comme un voile sur lequel les étoiles se dessineront en perspective. Si l'on ménage convenablement l'éclairement intérieur, on croira les voir attachées à ce ciel plan, de même qu'elles nous paraissent fixées au ciel concave formé par l'atmosphère. Quant à cette forme du ciel, en voûte plus ou moins surbaissée suivant les circonstances atmosphériques, elle n'est pas facile à expliquer; j'ai entendu dire cependant à des aéronautes que le sol lui-même, ou la couche de nuages qui le cache à leur vue,

semble se creuser de plus en plus à mesure qu'ils s'élèvent davantage. C'est comme un ciel inférieur qui tend à se former au-dessous de nous, concave comme le ciel supérieur. Il est possible que la forme de l'œil et de la rétine y soit pour quelque chose.

Fig. 5.



C'est à cette forme surbaissée de la voûte qu'on peut attribuer un phénomène bien connu, mais bien mal expliqué, à savoir les dimensions exagérées que prennent les astres, comme le Soleil ou la Lune et les constellations, quand on les voit près de l'horizon, tandis qu'au haut du ciel, ils reprennent leur grandeur ordinaire. Ici la sensation de grandeur est complexe : elle dépend à la fois de l'angle sous lequel on voit le diamètre d'un objet et de la distance d'un tableau sur lequel il se peint pour nous. L'angle sous lequel on voit un astre ne change pas, mais le fond sur lequel il se projette est plus loin à l'horizon qu'au zénith. Ce n'est donc pas, comme on l'a dit, qu'en regardant un astre à l'horizon, on voit en même temps des objets terrestres qui font mieux apprécier son éloignement : il suffit, en effet, de masquer ces objets avec la main pour constater que l'illusion ne change pas.

Cette apparence de voûte céleste, à laquelle il est impossible de se soustraire, a joué un grand rôle dans l'histoire de l'Astronomie. Les premiers hommes ont matérialisé dans leur imagina-

tion cette coupole bleue qui leur semblait comprendre tout l'univers; comme les enfants, ils se sont imaginé qu'en marchant bien loin dans une même direction, ils atteindraient le pied de cette voûte et verraient comment elle repose sur le sol. Les voyages, les migrations des peuples n'ont abouti qu'à leur donner une grande idée de son étendue. Pour eux, l'univers n'était rien de plus que le sol inébranlable et plan sur lequel nous marchons, et le ciel posé par-dessus comme une vaste cloche. C'est à ces illusions que se rattache la fable d'Atlas et d'Hercule soutenant le ciel sur leurs épaules. Les astres étaient tous renfermés sous cette voûte; ils s'y mouvaient sous la direction de divinités spéciales. Le Soleil lui-même, après avoir disparu chaque soir au couchant, se hâtait de regagner le levant pendant la nuit pour recommencer le lendemain sa course journalière.

Ce fut une grande révolution dans le domaine des sciences naissantes lorsqu'on se vit forcé de renoncer à cette conception naïve de l'univers, de reconnaître que la Terre est un globe isolé dans l'espace. Mais l'idée d'un ciel matériel résista : on en fit une vaste sphère solide tournant autour du globe terrestre et renfermant les astres dans sa concavité. Abordons maintenant la question des mouvements.

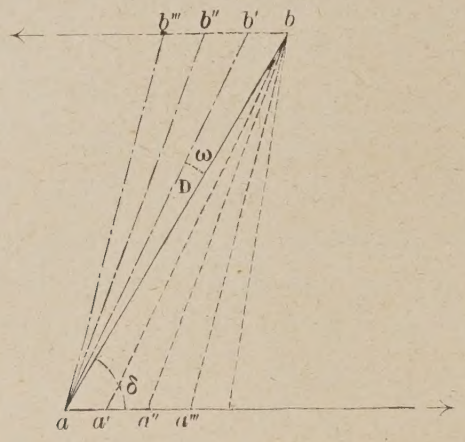
Le globe terrestre en a trois : un mouvement de translation rectiligne qui lui est commun avec le Soleil; sa rotation propre autour de l'axe de l'équateur; enfin, sa circulation annuelle autour du Soleil. L'observateur n'en sent aucun; les objets terrestres qui l'entourent, le sol qui le porte, lui semblent jouir d'une immobilité parfaite. Il est dans la situation d'un voyageur en wagon, ou en bateau à vapeur, ou en ballon : il attribue ses mouvements en sens inverse à tous les objets extérieurs de la Terre.

Illusion provenant d'un mouvement de translation rectiligne.

Soient $a\,a'\,a''$ ... (*fig.* 6), la trajectoire de l'observateur, b un point fixe plus ou moins éloigné, ab la direction où ce point est vu à un moment donné. La position de b sera définie par l'angle $baa' = \delta$ et la distance $ba = \mathrm{D}$. Si au bout d'une seconde l'observateur vient en a', l'objet sera vu dans une autre direction $a'\,b$; au bout de deux secondes dans la direction $a''\,b$ et ainsi de suite.

Le changement de ces directions et, en certains cas, celui de la distance, seront les seules choses qui impressionneront le spectateur, car ses sens ne perçoivent pas le mouvement qui l'anime.

Fig. 6.



Ayant au contraire le sentiment de son immobilité en un point quelconque de l'espace, en a, par exemple, et voyant le point b changer de direction, il lui attribuera un mouvement. Si l'on mène par le point a des lignes égales et parallèles aux droites ba', ba'', ba''', ..., mais de sens opposé, l'impression visuelle n'aura pas changé pourvu que le point b paraisse décrire $bb'b''\ldots$, c'est-à-dire une droite égale et parallèle à la trajectoire de l'observateur, en sens opposé. Telle est, en effet, la trajectoire apparente du point observé b. Il est aisé d'en déduire la vitesse angulaire apparente de ce point, la seule chose que la vue permette d'apprécier quand il s'agit des astres. En désignant aa' ou son égal bb' par ρ et par ω l'angle bab', on aura

$$\frac{\rho}{D} = \frac{\sin\omega}{\sin(\delta+\omega)},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\frac{\rho}{D}\sin\delta}{1-\frac{\rho}{D}\cos\delta}.$$

Pour les astres, D est très grand par rapport à ρ et ω est un petit angle; on peut donc remplacer la tangente par l'arc et négliger les puissances de $\frac{\rho}{D}$ supérieures à la première dans le développement de ω, ce qui donne

$$\omega = \frac{\rho}{D}\sin\delta.$$

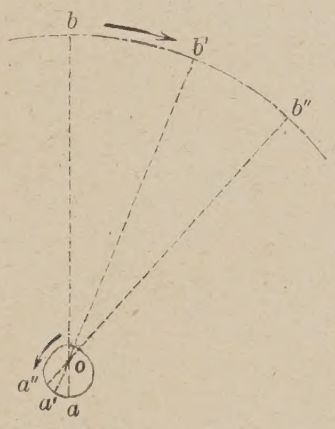
Ici ω est exprimé en parties du rayon, pris pour unité; si l'on veut l'avoir en secondes, il faut multiplier le second membre par la valeur, en secondes, de l'arc de longueur égale à l'unité, c'est-à-dire par $\frac{1}{\sin 1''}$ ou 206 265″.

Illusion provenant d'un mouvement de rotation.

L'observateur placé sur la Terre participe à sa rotation; le spectacle des objets terrestres tourne avec lui et rien ne l'avertit de son mouvement tant qu'il ne dirige pas ses regards vers des points extérieurs au globe, extérieurs même à notre atmosphère, car celle-ci tourne avec la Terre comme si elle faisait corps avec elle. En outre, comme il se trouve à quelque distance de l'axe de rotation, il y aura un double mouvement : une circulation sur un petit cercle dont le rayon sera une perpendiculaire à l'axe, et une rotation autour d'une droite passant par l'œil et se transportant avec lui parallèlement à l'axe de la Terre. Nous ne considérerons d'abord que le second, le premier étant absolument négligeable quand il s'agit des étoiles, dont la distance est comme infinie par rapport aux dimensions de la Terre.

Soient (*fig.* 7) :

Fig. 7.



O le centre optique de l'œil et en même temps la projection sur le plan de la figure de l'axe de rotation;

b un point extérieur au globe terrestre, situé dans le plan de la figure;

a l'image de ce point sur la rétine.

L'œil venant à tourner par l'effet de la rotation terrestre, l'image

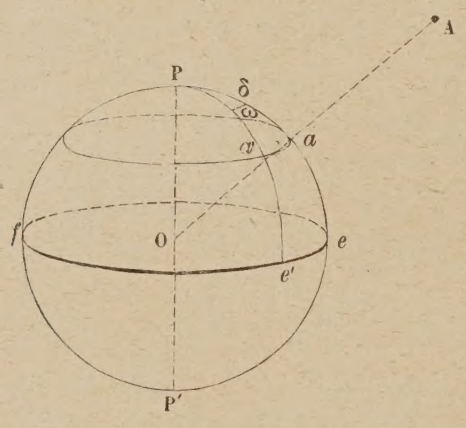
de l'objet b viendra se peindre successivement en différents points a, a', a'', ... de la rétine.

Supposons que l'œil soit maintenu dans sa première position et que l'objet b soit animé d'une vitesse angulaire autour du centre O égale et de sens contraire à la rotation; il est clair que son image se fera successivement aux mêmes points a, a', a'', ..., en sorte que les impressions perçues par l'observateur seront identiquement les mêmes dans les deux cas. Mais l'observateur n'a aucun sens qui l'avertisse de son mouvement, tandis que le sens de la vue lui montre le point b dans des directions différentes. Il attribuera donc sa propre rotation à ce point, et, comme il en est de même pour tous les astres, ceux-ci lui sembleront tourner autour de lui, en sens inverse de sa propre rotation, d'un mouvement angulaire commun, totalement indépendant de leur distance.

S'il s'agit de points situés d'une manière quelconque dans l'espace, et non de points situés dans un plan passant par O perpendiculairement à l'axe, c'est-à-dire dans l'équateur de la rotation, l'observateur rapportera involontairement ces points à une sphère idéale, ayant son centre à l'œil en O. Il est clair que tous ces points paraîtront se mouvoir comme si la sphère sur laquelle ils se projettent tournait autour de l'axe de la rotation réelle avec la même vitesse, mais en sens renversé.

Soient (*fig.* 8) :

Fig. 8.



PP′ l'axe de la rotation;
a la perspective sphérique d'un point extérieur A;
Pae un arc de méridien;
ee' f le cercle de l'équateur.

Si dans l'unité de temps la sphère paraît tourner de l'angle $\omega = ePe' = ee'$, le point a décrira dans le même temps l'arc aa', dont l'extrémité se trouvera sur le méridien primitif transporté en Pe'. On aura donc, en désignant par δ la distance Pa du point a au pôle,

$$aa' = ee' \sin\delta = \omega \sin\delta.$$

Au pôle, où δ est nul, la vitesse sera nulle aussi; elle atteindra son maximum à l'équateur.

A partir de l'époque où l'on s'est aperçu que le ciel ne reposait pas sur la Terre, on en a fait une vaste sphère concentrique à la Terre et renfermant l'univers. Cette illusion s'est d'ailleurs merveilleusement combinée avec celle que nous venons de décrire. Partant toujours de l'idée préconçue que le globe terrestre est immobile, on a transporté sa rotation journalière en sens inverse à la sphère céleste et, comme il serait absurde de supposer que des points très inégalement distants, comme le sont réellement les étoiles, s'accordassent à tourner tout d'une pièce autour d'un même axe, on a cru que les étoiles étaient des points brillants fixés dans la concavité de cette sphère tournante. De là vient le nom d'*étoiles fixes*, par opposition aux étoiles errantes ou planètes dont nous nous occuperons plus loin.

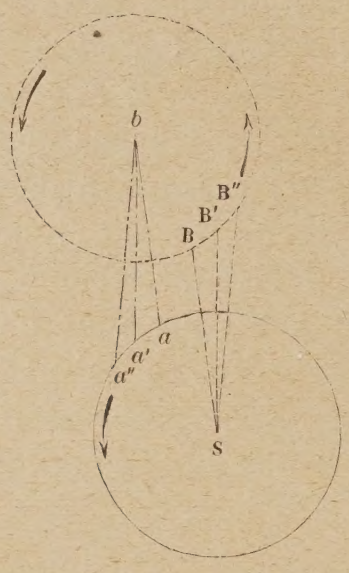
Illusion provenant du mouvement de circulation de la Terre autour du Soleil.

L'observateur parcourant le cercle $a\,a'\,a''$ ..., un point quelconque fixe b (*fig.* 9), indépendant du globe terrestre, sera vu successivement dans les directions ab, $a'\,b$, $a''\,b$, ... L'observateur, n'ayant aucune conscience de son mouvement, croira voir le point b se déplacer, et l'on obtiendra la trajectoire apparente de ce point en menant d'un centre quelconque où l'observateur se croira placé (1), par exemple du centre de la trajectoire réelle de la Terre, des droites SB, SB′, SB″, ..., égales, parallèles, mais de

(1) Nous prenons pour centre un point quelconque, parce que la position de la Terre ou de l'observateur, dans l'espace absolu, n'est pas définie. Il suffit que dans nos constructions ou nos calculs les directions où nous voyons les astres soient conservées.

directions opposées aux précédentes. Cette construction géométrique transporte évidemment au point *b*, comme centre, la trajectoire réelle, mais renversée, de la Terre, en sorte que ce même objet *b* sera vu en B, B′, B″, ... sur cette trajectoire, animé d'une vitesse constamment égale et contraire à celle du spectateur *a*. Néanmoins, l'orbite apparente du point fixe sera décrite par B dans le même sens que l'orbite réelle de *a*. Il y a là une sorte de contradiction avec la loi générale d'après laquelle le spectateur

Fig. 9.



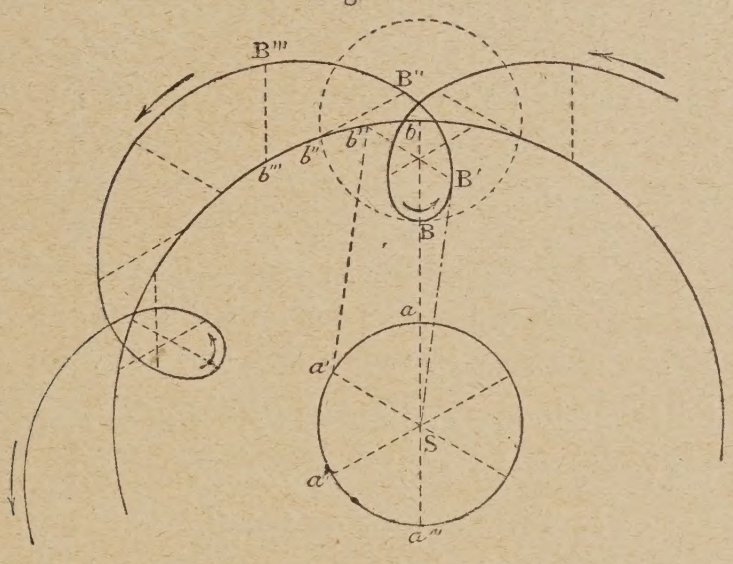
transporte aux objets extérieurs son propre mouvement en sens contraire, mais elle tient simplement à la nature du mouvement dans une orbite fermée, car il y a toujours, dans ce cas, pour chaque point de cette orbite, une région diamétralement opposée dans laquelle le mouvement s'opère en sens inverse. Ainsi l'astre B est toujours, sur son orbite apparente, de 180° en arrière de *a* sur la sienne. En effet, si l'on mène les rayons S*a* et *b*B, ces deux rayons seront évidemment égaux, parallèles, mais de sens opposés.

Ainsi toutes les étoiles du ciel, considérées comme des points fixes, nous paraîtront décrire en un an, durée de circulation de la Terre autour du Soleil, une orbite précisément égale et parallèle à celle de notre globe. Nous donnerons plus tard les formules qui en permettent le calcul. Ce cercle décrit par chaque étoile porte le nom d'*épicycle annuel;* on en verra tout à l'heure la raison. La distance des étoiles les plus voisines étant énorme par rapport aux

dimensions de l'orbite que la Terre décrit autour du Soleil, leurs orbites apparentes annuelles, vues de la Terre, ne sous-tendent pour nous qu'un angle extrêmement petit, malgré leur diamètre commun de 74 millions de lieues. Il faut toute la puissance des plus grandes lunettes pour les rendre appréciables. Comme elles échappaient complètement à l'observation à l'œil nu, les contemporains de Copernic, peu préparés à concevoir un si gigantesque univers, en faisaient une objection au vrai système du monde. Nous allons voir que ces mêmes épicycles annuels, si peu sensibles pour les étoiles à cause de leur distance, sont, au contraire, très sensibles pour les astres voisins, c'est-à-dire les planètes, et s'y révèlent d'une manière frappante.

Les choses se passeront, en effet, de la même manière si le point b, au lieu d'être immobile comme nous venons de le supposer, se meut lui-même sur une courbe quelconque $bb'\,b''$ (*fig.* 10),

Fig. 10.



comme font les planètes; seulement sa trajectoire apparente se composera de deux mouvements, l'un réel qui lui appartient en propre, l'autre apparent qui provient de la circulation dont l'observateur est animé. Cette combinaison est une question de pure Géométrie. Pendant que le point apparent B décrit son épicycle annuel autour de la position vraie b, ce dernier décrit sa propre trajectoire, en sorte que la courbe résultante se réduit à une épicycloïde dont il est facile d'obtenir l'équation. Le cas le plus simple est celui où la trajectoire du point b est située dans le

plan même de l'orbite terrestre. Construisons cette courbe par points sur l'épure ci-jointe. La planète étant en b' et la Terre en a', on aura le lieu apparent de la planète, vue du centre S des mouvements de la Terre, où l'observateur se croit immobile, en menant SB′ égal, parallèle et de sens contraire à $b'a'$ ou, ce qui revient au même, en menant b' B′ égal, parallèle et opposé à S a'. La même construction donnera les points suivants de l'épure. On obtient ainsi une épicycloïde à boucles dont les sommets se reproduisent chaque fois que les trois points S, a, b sont en ligne droite, c'est-à-dire lorsque la planète b, vue de la Terre a, est *en opposition* avec le Soleil. Sur une pareille courbe, les mouvements des planètes sont très compliqués; en suivant le sens des flèches marquées sur la figure, on voit qu'à l'époque des oppositions, la planète semble être animée d'un mouvement rétrograde; ailleurs elle marche dans le sens direct. Aux changements de sens, son mouvement s'effectue dans la direction du rayon visuel alors tangent à l'épicycloïde, et la planète semble s'arrêter. Ce sont les stations et rétrogradations des planètes. La période de ces apparences compliquées est facile à trouver quand on suppose que les mouvements réels sont circulaires et uniformes. Les deux planètes a et b ont pour vitesse angulaire $n = \frac{2\pi}{T}$, $n' = \frac{2\pi}{T'}$, en désignant par T et T′ la durée de leurs révolutions; par conséquent, leur vitesse relative sera $n - n'$. Si donc elles partent d'une opposition, elles se retrouveront de nouveau en opposition au bout d'un temps égal à $\frac{2\pi}{n - n'}$ [1]. Cette période se nomme la *révolution synodique* de la planète b; c'est une combinaison simple des durées des révolutions de la planète et de la Terre autour du Soleil.

Si l'orbite de la planète b n'est pas située dans le même plan que celle de la Terre ou du spectateur a, la trajectoire apparente sera une épicycloïde à double courbure.

A propos de la rotation de la Terre, nous décomposions le mouvement du spectateur en une rotation autour d'un axe parallèle à celui de notre globe, et une circulation de petit rayon et d'un jour de durée autour de cette dernière droite. L'observateur trans-

---

[1] C'est exactement le problème élémentaire bien connu de la rencontre des deux aiguilles d'une montre.

porte aussi ce dernier mouvement à tous les points extérieurs; ceux-ci lui paraissent décrire en un jour une circonférence de même rayon autour de leur position vraie. C'est donc une nouvelle courbe épicycloïdale qui se superpose, comme une sorte de festonnage, à la précédente. Peu sensible sur les planètes éloignées, elle l'est davantage pour les planètes les plus voisines de nous.

Conception de l'univers dans l'antiquité.

On voit par là combien les mouvements apparents sont compliqués, tandis que les mouvements réels sont simples. De là deux systèmes astronomiques, celui des anciens et celui des modernes. Les anciens, fermement convaincus de l'immobilité de la Terre, étaient forcés d'attribuer en sens inverse tous ses mouvements aux autres astres : d'abord, à tous les astres, une rotation diurne rétrograde autour d'un axe commun passant par le centre du monde, c'est-à-dire de la Terre; puis, à tous les astres, la Lune exceptée, une orbite annuelle égale à celle de la Terre, mais renversée; enfin, aux planètes, une combinaison de leurs mouvements réels avec l'épicycle d'un an, combinaison qui fait prendre pour des réalités des mouvements qui ne sont tantôt directs, tantôt rétrogrades qu'en apparence. Je ne parle pas de l'épicycloïde diurne, qui n'est sensible que pour les observations précises. Si l'hypothèse d'une Terre immobile ne s'était pas si fortement imposée à leur esprit, ils auraient aisément reconnu la simplicité des mouvements réels s'effectuant toujours dans le même sens autour du Soleil; ils auraient compris qu'il s'agit là, non pas d'un mécanisme à deviner, mais d'une question de Mécanique à résoudre; ils auraient vu que les planètes sont retenues dans leurs orbites par l'attraction du Soleil, et ils en auraient obtenu la mesure en comparant ces mouvements de circulation avec ceux que nous réalisons nous-mêmes lorsque nous faisons tourner une pierre au bout d'une corde et que nous étudions la manière dont la tension de celle-ci varie avec la vitesse. Ce qui a empêché pendant deux mille ans la Mécanique céleste, et par suite la Mécanique ordinaire, de naître dans l'esprit des profonds géomètres de l'antiquité, c'est cette intime persuasion de l'immobilité de notre globe. Elle les a conduits au système absurde que voici.

L'univers est contenu tout entier dans une grande sphère tournante dont la Terre occupe le centre. Les étoiles sont fixées, attachées à sa concavité. Il y a sept planètes qu'on rangeait dans l'ordre de leurs distances probables à la Terre, à savoir la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne, et elles ont donné leurs noms aux sept jours de la semaine. Ces planètes sont attachées à des sphères concentriques, emboîtées dans la première. Pour expliquer le mouvement diurne du ciel, commun aux planètes et aux étoiles, on croyait que la sphère des fixes était animée d'une rotation rétrograde autour d'un certain axe nommé *axe du monde* et qu'elle entraînait les sept autres sphères dans son mouvement journalier, à peu près comme le premier mobile d'une horloge conduit toutes les autres roues. Quant aux planètes portées par ces sphères, on leur donnait du jeu pour expliquer les phénomènes si compliqués de leurs trajectoires, au moyen d'une combinaison de cercles et d'épicycles d'ailleurs identique à celle que nous venons d'exposer. On supprimait jusqu'à la possibilité d'établir quelque analogie entre les mouvements des corps terrestres, susceptibles d'être étudiés expérimentalement, et ceux des corps célestes, car on se trouvait amené à croire que ceux-ci étaient d'une nature plus noble, d'une essence supérieure, conduits par des intelligences divines. Enfin, comme toute machine fait du bruit, on assurait que les mouvements de ces sphères, y compris celle des *fixes*, produisaient des sons différents, et que, si nous ne percevons pas cette céleste harmonie, c'est que nous l'entendons depuis l'enfance et que nos oreilles y sont habituées.

Cependant ce système, malgré son absurdité, est encore en usage journalier parmi les astronomes aussi bien que dans le public, parce qu'il est l'immédiate traduction de nos impressions. On continue à dire que le Soleil se lève au lieu de dire que le plan de l'horizon de l'observateur s'est abaissé, par la rotation de notre globe, au-dessous de cet astre. On continue à représenter le ciel comme une sphère et les étoiles comme des points brillants qui y seraient attachés; on dit encore le mouvement diurne du ciel, comme si tout cela avait quelque réalité. Mais ce n'est là qu'un langage familier et commode dont nous allons faire usage à tout instant, sachant bien quelles sont les réalités masquées sous ces apparences.

Classification des étoiles et mesure de leur distance.

Les étoiles vues à l'œil nu sont entourées d'appendices lumineux qui n'ont d'existence que dans les humeurs de l'œil. Ces rayons disparaissent dans les télescopes, et les étoiles se réduisent alors à de simples points d'un vif éclat. Rien n'est plus propre à imprimer dans l'esprit d'un commençant l'idée de la grande distance où sont les étoiles que de lui montrer, l'une après l'autre, avec des grossissements de plus en plus forts, une planète de notre système, Jupiter, par exemple, et une belle étoile quelconque. D'abord la planète présente un disque sensible; ce disque augmente à mesure qu'on augmente le grossissement; on finit par y distinguer les détails de sa figure. L'étoile, au contraire, reste toujours un point brillant (1), quel que soit le grossissement; sur les étoiles, en un mot, les plus puissants télescopes échouent complètement.

Les étoiles sont distribuées dans le ciel sans ordre apparent, comme au hasard. Cependant elles se trouvent particulièrement accumulées dans une zone assez peu régulière qu'on appelle la *Voie lactée*. Les astronomes les rangent en groupes fantastiques qu'on nomme *constellations*, groupes qui n'ont qu'une valeur purement mnémonique. Ils les classent, en outre, par ordre de *grandeur* (2) ou plutôt d'éclat, car il ne saurait être question de grandeur pour de simples points sans dimensions appréciables. On en compte :

20 de 1re grandeur,
65 de 2e »
190 de 3e »
425 de 4e »
1100 de 5e »
3200 de 6e »

---

(1) Sauf un effet de diffraction dont il sera question plus loin.

(2) Depuis l'antiquité, l'éclat des étoiles est universellement exprimé en grandeurs. Les plus brillantes sont dites de la *première* grandeur, les suivantes de la *seconde* et ainsi de suite jusqu'aux plus faibles que puisse voir l'œil nu et qui sont de la *sixième* grandeur. Il se trouve ainsi que la grandeur d'une étoile est exprimée par un nombre d'autant plus fort que l'éclat de l'étoile est plus faible. De là des confusions qu'on a évité en proposant de remplacer *grandeur* par *magnitude*.

d'où il paraît bien que, si les étoiles diffèrent tant d'éclat entre elles, cela ne tient pas seulement à une inégalité réelle, mais aussi et surtout à la distance, c'est-à-dire à leur dissémination dans un espace de plus en plus grand. Au delà de la 6^{e} grandeur, un œil ordinaire ne distingue rien de net. Il remarque seulement en certaines régions, telles que la Voie lactée, une lueur diffuse produite par des étoiles d'un trop faible éclat pour être perçues isolément. En effet, pour l'œil armé d'une lunette ordinaire, cette lueur se décompose en étoiles qu'on classe comme les précédentes. On en compte ainsi :

13 000 de 7^{e} grandeur,
40 000 de 8^{e} »
142 000 de 9^{e} »
... .

C'est, grossièrement, une progression géométrique ayant 3 pour raison.

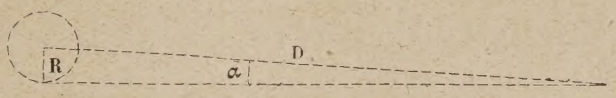
Mais, si en certaines régions du ciel on voit les dernières étoiles de 10^{e}, 11^{e}, ... grandeur se projeter sur le fond noir du ciel, ce qui semble indiquer que l'œil atteint là les limites de l'univers, dans d'autres on retrouve cette vague lueur dont nous parlions tout à l'heure, lueur qui accuse la présence d'étoiles d'un éclat encore plus faible et plus éloignées de nous. Avec les puissants télescopes dont les astronomes sont armés aujourd'hui, on a compté 18 000 000 d'étoiles jusqu'à la 15^{e} grandeur, dans la seule Voie lactée, mais sans atteindre encore la limite de l'univers stellaire.

On conçoit qu'un tel ensemble, auquel il faut joindre, pour embrasser tout l'univers, d'autres corps, les mystérieuses nébuleuses, a dû échapper complètement à notre entendement pendant des siècles. Ce n'est, en effet, que depuis que la science a fait ses progrès les plus récents que l'on commence à en démêler quelque peu les lois. Jusqu'à un demi-siècle environ, tout ce qu'on avait pu faire par rapport à l'agrégat d'étoiles qui nous environne, parmi lesquelles le Soleil ne compte que comme une étoile de moyenne grandeur, était d'essayer de mesurer la distance de quelques-unes d'entre elles, en cherchant à employer les procédés d'évaluation des distances des géodésiens.

Nous avons vu que toute étoile, comme d'ailleurs tout point de l'univers, hors la Terre et son satellite, paraît décrire en un an,

autour de son lieu réel, une orbite égale et parallèle à celle de la Terre, mais renversée. Si donc à l'aide d'une lunette on mesure les dimensions de cette orbite apparente, on aura, en désignant par R (*fig.* 11) son rayon et par D sa distance, par 2α l'angle sous-tendu

Fig. 11.



par le diamètre de cette orbite qui se présente perpendiculairement au rayon visuel,

$$\sin\alpha = \frac{R}{D}.$$

R, ou la distance de la Terre au Soleil, est connu; on le prend pour unité de distance en Astronomie; α ayant été mesuré, on en conclut

$$D = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

On peut présenter les choses d'une autre manière; ceci revient, comme nous l'avons dit, à employer le procédé des géodésiens. En effet, pour déterminer la distance d'un objet inaccessible, les géodésiens commencent par mesurer ou calculer la longueur d'une base, puis de ses deux extrémités, ils mesurent les angles à la base du triangle formé par cette ligne et l'objet. En résolvant ce triangle, on obtient la distance cherchée. Quand il s'agit des étoiles, il serait impossible de prendre une base sur le globe terrestre, car ses dimensions sont, comme nous allons le voir, évanouissantes vis-à-vis de la distance des étoiles. Mais le mouvement annuel de la Terre nous transporte, à six mois de date, aux deux extrémités d'un diamètre de son orbite, diamètre dont la longueur est de 74 millions de lieues. C'est là la base dont nous disposons.

Si donc, à six mois de distance, on détermine la direction d'une étoile, on y trouve un léger changement, une *parallaxe* due au déplacement de l'observateur; en appelant 2R la base, 2α l'angle au sommet, on a, comme tout à l'heure,

$$D = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

La grande difficulté de ces mesures consiste en ce que la parallaxe, très petite, est presque du même ordre de grandeur que les erreurs dont les observations sont susceptibles. D'autres procédés basés sur la spectroscopie ont permis d'étendre beaucoup le champ des mesures de parallaxe. Nous les décrirons en détail dans la partie de cet Ouvrage qui traitera de l'Astronomie physique. Voici toutefois un certain nombre des résultats obtenus par le procédé de mesures directes dont nous venons de parler.

Parallaxes des étoiles.

(*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1923, p. 318).

Noms des étoiles.	Magnitude.	Parallaxes.	Distance à la Terre en rayons de l'orbite terrestre.	Distance à la Terre en années de lumière.
α Centaure.....	0,2	0″,75	280 000	4,35
✳ Barnard.....	10,5	0,42	490 000	7,76
21.185 Lalande..	7,6	0,40	520 000	8,15
Sirius (1).....	—1,6	0,38	540 000	8,58
36 Ophiuchus...	5,3	0,36	570 000	9,05
130 Piazzi (o^h)..	5,7	0,35	590 000	9,31
61 Cygne.....	6	0,33	630 000	9,88
Procyon.....	0,5	0,32	650 000	10,18
Altaïr.....	0,9	0,22	940 000	14,81

Les distances sont exprimées à l'aide de l'unité astronomique, c'est-à-dire la distance moyenne du Soleil à la Terre. Pour en donner une idée plus saisissable, on l'a exprimée aussi par les temps que la lumière mettrait à les franchir, On verra plus loin que sa vitesse est telle, qu'elle n'emploie que 8 minutes 10 secondes à venir du Soleil jusqu'à nous.

D'après ce tableau, on voit que, sauf α du Centaure, les étoiles les plus voisines de nous ont en moyenne une parallaxe de 0″, 35 au plus et, par suite, une distance de $\frac{R}{\sin 0'',35}$, soit environ un demi-million de fois la distance de la Terre au Soleil.

Bien que les étoiles les plus brillantes ne soient pas nécessairement les plus proches, il y a lieu de croire que la plupart des étoiles moins brillantes sont encore plus éloignées.

(1) Sirius est la plus belle étoile du ciel; son éclat est bien supérieur à celui des étoiles de première grandeur, telles que la Chèvre, la Lyre, Arcturus, etc.

Si le Soleil, dont le diamètre angulaire vu de la distance moyenne R = 1 est de 32′ ou 1920″, était relégué dans la région des étoiles les plus voisines, il serait vu d'ici sous un angle de

$$\frac{1920''}{1.000.000} = 0'',001920,$$

quantité insensible; il nous apparaîtrait comme un simple point brillant, absolument comme les étoiles vues avec les plus puissants télescopes. Quant à la Terre, dont le diamètre est 108 fois plus petit que celui du Soleil, elle n'aurait qu'un diamètre angulaire de 0″, 000018.

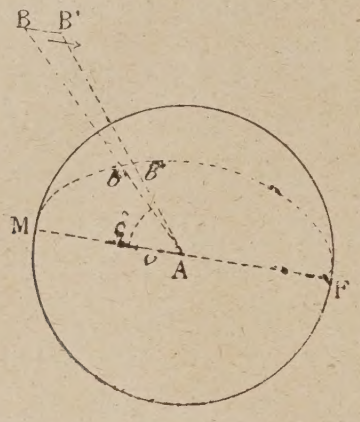
Il découle de là deux conséquences capitales pour l'étude que nous allons entreprendre. La première, c'est que, l'épicycle annuel et à plus forte raison l'épicycle diurne étant insensibles pour les étoiles à cause de leur distance énorme, ces astres-là ne présentent qu'une seule des trois illusions dues aux mouvements de l'observateur, à savoir la rotation diurne apparente, tandis que les planètes sont affectées à la fois de ces trois mouvements. Il est donc tout indiqué de commencer l'Astronomie par les étoiles, non pour elles-mêmes, mais pour l'étude de la rotation de la Terre qui se trouvera ainsi dégagée de toute circonstance accessoire. La seconde conséquence, c'est qu'en raisonnant sur les étoiles, nous serons en droit de faire abstraction des dimensions de notre globe et de le considérer, lui et tout ce qu'il porte, comme réduit à un simple point. La première partie de notre science se nomme *étude du mouvement diurne* ou *Astronomie sphérique*, parce qu'on y conserve la sphère céleste des anciens à titre de pure conception géométrique. Je veux dire que nous y considérerons, non pas les étoiles elles-mêmes, dont nous n'aurons plus à nous occuper, mais leurs perspectives sur une sphère idéale d'un rayon infini par rapport à celui de la Terre, ces perspectives n'étant elles-mêmes que des points mathématiques.

Mouvement de translation du système solaire.

Il n'affecte nullement les planètes, puisque le Soleil les entraîne avec lui, ainsi que la Terre. Examinons les mouvements apparents qui en résultent pour les étoiles.

Ici nous pouvons nous placer par la pensée sur le Soleil lui-même, au centre de la sphère étoilée dont nous venons de parler. Soit AM (*fig.* 12) la direction dans laquelle le Soleil marche, en

Fig. 12.



sorte que le point M soit le point de mire du système solaire, et le point diamétralement opposé F son point de fuite. Considérons une étoile B et sa projection sphérique en *b*. D'après ce que nous avons vu, l'observateur attribuera son propre mouvement en sens inverse au point B; celui-ci paraîtra décrire la ligne BB′ avec la vitesse même dont le Soleil est animé. Sur la sphère, la projection *b* décrira donc le petit arc *bb′* dont les prolongements passeront par les points M et F. Sa vitesse angulaire ω sera donnée par

$$\omega = \frac{v}{D} \sin \delta,$$

en désignant sa distance linéaire au Soleil par D, sa distance angulaire au point M par δ et la vitesse linéaire du Soleil par v. Cette vitesse angulaire est la seule chose que nous puissions mesurer. Elle varie, d'une étoile à l'autre, avec D et δ. A distances égales, elle est maximum pour $\delta = 90^{\circ}$, c'est-à-dire pour les étoiles situées sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à FM. On vient de voir que les étoiles sembleront décrire de très petits arcs de grand cercle divergeant du point M et convergeant vers le point F. Il y aura donc deux régions en M et en F où les étoiles resteront immobiles.

Comment peut-on découvrir par l'observation du ciel ce point M vers lequel marche le Soleil? Par un procédé très simple. Les astronomes ont déterminé depuis deux siècles, à plusieurs reprises,

les positions des principales étoiles à la surface de cette sphère. En comparant des observations faites à de longs intervalles, ils constatent que les étoiles se sont déplacées quelque peu. Si ces mouvements étaient dus uniquement à l'illusion produite par la translation rectiligne du système solaire, il suffirait de porter ces petits arcs sur une sphère matérielle et de les prolonger pour obtenir, par leurs points d'intersection, les deux points M et F. C'est ce qu'a fait Herschel pour une vingtaine d'étoiles les plus brillantes; il a trouvé, non pas un point, mais une région de convergence de ces arcs dans la constellation d'Hercule. Le même résultat a été obtenu par le calcul en employant plusieurs milliers d'étoiles. Il paraît donc bien établi que le Soleil marche effectivement dans cette région.

Mouvements propres des étoiles.

Les étoiles se meuvent aussi bien que le Soleil, en sorte que la supposition précédente, sur laquelle est basée la recherche de notre point de mire, ne semble pas justifiée. Mais les petits mouvements propres des étoiles paraissent n'être soumis à aucune loi. Si donc ils offrent quelque chose de commun, ce ne pourra être qu'une tendance commune à diverger d'une région quelconque de la sphère, et alors on est en droit de l'attribuer à l'effet du mouvement propre de notre système. Dans la pratique, on ne tient nul compte de cette distinction entre les mouvements propres des étoiles et leur mouvement apparent dû à la translation de notre système. On détermine comme on vient de le dire, pour chaque étoile en particulier, le mouvement angulaire dont elle paraît animée, quelle qu'en soit la cause, et l'on trouve qu'il suffit d'un très petit terme proportionnel au temps pour être en état de ramener à une époque quelconque les coordonnées observées à une autre date. On est ainsi dans le même cas que si les étoiles étaient réellement et absolument fixes.

Ces corrections sont toujours très faibles, souvent même insensibles; elles ne s'élèvent guère, en général, qu'à des fractions de seconde et dépassent rarement $1''$ ou $2''$ par an. Cependant, dans la suite des siècles, leurs effets deviennent sensibles, même à l'œil nu, en s'accumulant. Arcturus, par exemple, a franchi un demi-

degré depuis le temps d'Hipparque, c'est-à-dire à peu près l'équivalent du diamètre angulaire de la Lune. A compter le temps par milliers de siècles, l'aspect des constellations en serait singulièrement modifié.

Les astronomes ne déterminent ainsi que la vitesse angulaire des étoiles, estimée perpendiculairement au rayon visuel. Nous ne saurions rien sur l'autre composante, à savoir la vitesse estimée dans le sens du rayon visuel, si l'analyse spectrale n'avait trouvé, dans les petits déplacements des raies du spectre de chaque étoile, le moyen de mesurer cet élément. Seulement, cette fois, il ne s'agit plus de vitesse angulaire, mais de vitesse absolue, estimée à tant de kilomètres par seconde.

Vitesse radiale de quelques étoiles (1).

	Grandeur.	Vitesse radiale. km
α Petit Chien	0,5	— 3,6
α_1 Croix	1,6	+ 7,0
γ Croix	1,6	+ 20,4
η Grande Ourse	1,9	— 6,0
α Bouvier	0,2	— 3,9
α_2 Centaure	1,7	— 22,2
α Lyre	0,1	— 18,1
α Poisson austral	1,3	+ 6,7
γ Éridan	3,2	+ 62,5
λ Sagittaire	2,9	— 43,1

Le signe — désigne un mouvement vers l'observateur, le signe + le mouvement opposé.

(1) F. Henroteau, *Les étoiles simples*, 1921 (d'après diverses listes).

PREMIÈRE PARTIE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE. — DESCRIPTION DES INSTRUMENTS.

THÉORIE DES ERREURS.

GÉODÉSIE ET GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE.

LIVRE PREMIER.

THEORIE DU MOUVEMENT DIURNE DU CIEL.

Description du mouvement diurne apparent du ciel.

La Terre est un sphéroïde légèrement aplati qui tourne autour de son plus petit axe. L'espace où elle se meut n'oppose aucune résistance capable d'altérer cette rotation. La Mécanique nous apprend que, dans ces conditions, la rotation est éminemment stable, c'est-à-dire qu'elle s'opère autour du même axe avec une parfaite uniformité, malgré les mouvements oscillatoires de l'atmosphère et des mers. D'autre part, la translation annuelle de la Terre autour du Soleil n'influe en rien sur la rotation; l'axe de celle-ci reste toujours parallèle à lui-même et affecte par conséquent une direction absolument fixe (1). Nous avons dit que l'orbite terrestre vue des étoiles est imperceptible; il en résulte que nous sommes en droit de négliger entièrement ce mouvement de translation et de raisonner comme si la Terre était immobile dans l'espace, sauf la rotation que nous allons étudier. D'ailleurs, il est naturel de rapporter les étoiles à une sphère idéale ayant pour centre l'œil du spectateur et sur laquelle elles se projettent, car nous n'aurons jamais à nous occuper de leurs distances, mais seulement de leurs directions et, comme les dimensions du globe terrestre sont absolument insensibles par rapport à ces distances, il n'y aura aucune distinction à faire entre les diverses régions de la Terre et l'œil de l'observateur; tout se réduit à un simple point, centre de la susdite sphère céleste. Enfin, comme la rotation réelle

(1) Nous faisons ici abstraction de la précession et de la nutation.

de la Terre engendre l'illusion de la rotation, en sens opposé, de tous les points extérieurs, nous raisonnerons comme si l'observateur était immobile au centre de la sphère céleste, tandis que celle-ci tournerait avec les étoiles autour de l'axe terrestre, dans le même temps, mais en sens inverse.

Si l'on examine le ciel pendant une nuit claire, on voit cette conception se réaliser; seulement il faut un peu de temps pour saisir la lente rotation des étoiles. En y revenant à plusieurs reprises, en rapportant les étoiles à des alignements pris sur des repères terrestres désormais considérés comme fixes, on constate le mouvement régulier dont elles sont animées. On voit les constellations se lever successivement sur l'un des bords de l'horizon, monter lentement dans le ciel, atteindre la plus grande hauteur, puis décliner de l'autre côté et finalement disparaître au bord opposé de l'horizon. Le même phénomène affecte le Soleil et la Lune, ainsi que les planètes ou les comètes, dont nous aurons à nous occuper plus tard. Avec un peu d'attention, on constate que ce mouvement s'effectue tout d'une pièce autour d'un axe incliné qui va percer le ciel très près de l'étoile α de la Petite Ourse. Cette étoile semble ne pas bouger, parce que le cercle qu'elle décrit en 24 heures n'a guère que $1^{o}6'$ de rayon. Lorsqu'on se place par la pensée dans la direction de l'axe du monde, le sommet de la tête tourné vers cette étoile, on constate que la rotation apparente de la sphère céleste a lieu de gauche à droite, dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est le sens que les astronomes nomment *rétrograde* (1).

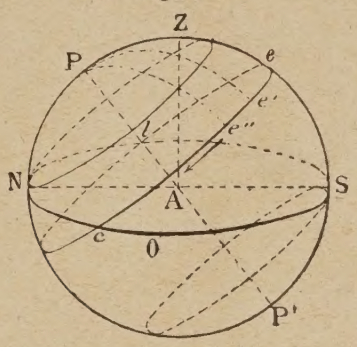
Enfin, le jour vient; le Soleil se lève à l'horizon de gauche, c'est-à-dire à l'est ou au levant, et sa lumière, en éclairant l'atmosphère, efface toutes les étoiles pour l'œil nu. On peut suivre néanmoins les plus belles avec une lunette; elles restent visibles tout le jour, sauf dans la région la plus voisine du Soleil.

Les particularités de ce mouvement sont toutes géométriques. Désignons par SON (*fig.* 13) le cercle de l'horizon qui divise la sphère céleste en deux moitiés, l'une visible, l'autre invisible; par

(1) Par conséquent, le rotation réelle de la Terre, qui donne lieu à cette apparence, s'effectue de droite à gauche pour l'observateur ainsi placé, c'est-à-dire dans le sens direct.

PP′ l'axe incliné de la rotation diurne. L'observateur et la Terre tout entière étant en A, centre de cette sphère, si l'on mène AZ, verticale de l'observateur, cette droite, perpendiculaire au plan de l'horizon, sera l'axe de symétrie de la portion visible du ciel. D'autre part, l'axe AP est l'axe de symétrie de la rotation. Par conséquent, le plan SZPN, qui passe par ces deux axes, sera un

Fig. 13.



plan de symétrie pour tous les phénomènes du mouvement diurne au-dessus de l'horizon. C'est le plan méridien du lieu A; sa trace horizontale SN est la méridienne. Le méridien vertical SZPN contient les points culminants de tous les parallèles décrits par les étoiles; il divise en parties égales et symétriques les portions visibles de ces parallèles, c'est-à-dire les arcs situés au-dessus de l'horizon. Ainsi, du lever d'une étoile en *l*, jusqu'à l'instant de son passage au méridien en *e*, il s'écoule juste autant de temps que du méridien au coucher en *c*. Si, par les points N et S, on mène des plans perpendiculaires à l'axe du monde PP′, ces plans détermineront trois zones. L'intermédiaire est celle des étoiles qui se lèvent et se couchent. La calotte qui a pour centre le pôle visible P contient les étoiles qui ne se couchent jamais, c'est-à-dire dont les parallèles sont situés en entier au-dessus de l'horizon; la calotte qui a pour centre le pôle invisible P′ est celle des étoiles qui ne se lèvent jamais et que l'observateur ne peut voir tant qu'il restera au même point du globe terrestre.

Ces notions de pure Géométrie céleste vont nous permettre de rapporter les astres à un système de coordonnées sphériques et d'établir une mesure parfaite du temps.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES USITÉS EN ASTRONOMIE.

Coordonnées locales des étoiles.

Le mot *locales* veut dire ici relatives à un lieu donné A. Si l'on considère une étoile quelconque *e* (*fig.* 13), il est évident que sa distance au pôle P de la rotation reste constante. Désignons cette distance polaire P*e*, P*e'*, P*e''*, ... par δ. D'autre part, la rotation étant uniforme, les angles dièdres SP*e'*, SP*e''*, SP*e'''* seront proportionnels aux temps écoulés à partir de l'instant où l'étoile aura passé en *e* au méridien. Désignons cet angle dièdre variable par H, signe abréviatif des mots *angle horaire*. Nous pourrons prendre

$$\delta = \text{const.},$$
$$H \text{ proportionnel au temps}$$

pour les coordonnées sphériques de cette étoile; elles en détermineront évidemment la position à un instant quelconque, si l'on donne la valeur de l'angle horaire H à cet instant et, une fois pour toutes, la distance polaire δ.

Nous conviendrons de compter H de 0° à 360° dans le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire dans le sens rétrograde marqué par les flèches de la figure, L'instrument destiné à mesurer cette espèce de coordonnée porte le nom d'*équatorial;* on en trouvera plus loin la figure.

Tout instrument de ce genre doit avoir un axe de rotation qu'on dirige suivant l'axe même du système de coordonnées, c'est-à-dire ici suivant AP. Il doit, en outre, avoir une lunette fixée à un second axe de rotation perpendiculaire au premier. La lunette peut être placée excentriquement, car, vis-à-vis de la distance des étoiles, les dimensions de l'instrument ne comptent pas. En fai-

sant tourner la lunette autour de son axe propre, la ligne de visée parcourt un grand cercle du ciel passant par le pôle P. Si donc, on fixe un limbe divisé à cet axe, on pourra mesurer la distance polaire d'un astre situé sur ce grand cercle. En faisant tourner tout l'instrument autour de l'axe AP, on amènera le plan décrit par la lunette à occuper successivement toutes les positions autour de AP et, si cet axe principal porte lui-même un limbe divisé, on sera en état de mesurer l'angle horaire H ou SPe' d'une étoile quelconque e'.

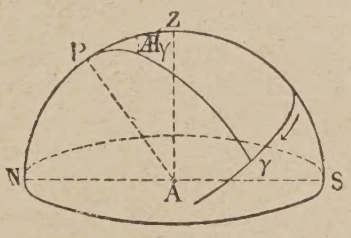
Mesure du temps. Jour sidéral. Heure.

Nous prendrons naturellement, pour mesurer le temps, la durée même de la rotation du ciel. C'est le temps compris entre deux retours consécutifs d'une même étoile à la même direction, ou bien entre deux passages successifs de cette étoile au méridien du lieu. Cet intervalle prend le nom de *jour sidéral* (il est plus court de 4 minutes que le jour solaire moyen, dont les astronomes font aussi usage).

Il se divise en 24 heures sidérales, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

Ce n'est pas tout que de fixer la durée du jour, il faut encore lui assigner une origine. Nous conviendrons de prendre, pour marquer

Fig. 14.



en un lieu quelconque le commencement du jour sidéral, c'est-à-dire l'instant où la pendule sidérale doit marquer $0^h0^m0^s$, celui où un certain point du ciel, fixé par une convention, passera au méridien du lieu. Nous lui donnerons le nom de *point vernal* et pour signe la lettre γ. Il serait assez difficile actuellement de définir ce point, dont le choix se rapporte à la théorie du Soleil; supposons simplement qu'il y ait là une étoile γ dont on puisse à tout instant mesurer l'angle horaire H_γ (*fig.* 14).

Cet angle horaire varie de 360° en 24 heures, par conséquent, de 15° en une heure, de 15′ en une minute et de 15″ en une seconde. Nous disions tout à l'heure qu'il varie proportionnellement au temps écoulé depuis l'instant du passage du point origine γ au méridien : ce temps n'est autre chose que l'heure sidérale H. On aura donc

$$\frac{1}{15}\,\text{Æ}_{\gamma} = \text{H},$$

et, comme rien ne nous empêche de diviser la circonférence en 24 parties égales appelées *heures*, et de compter les angles par la même numération que le temps, nous écrirons dans ce système :

$$\text{H} = \text{Æ}_{\gamma}$$

et nous dirons que l'heure sidérale à un instant donné est égale à l'angle horaire du point γ à cet instant. Nous allons voir qu'à ce point γ, on peut substituer une étoile quelconque dont les coordonnées uranographiques soient bien connues.

Coordonnées uranographiques.

Considérons actuellement la sphère céleste indépendamment de

Fig. 15.

son mouvement de rotation journalière qui en amène successivement les diverses parties au-dessus de notre horizon. Pour en

faire la description, c'est-à-dire pour déterminer les positions relatives des étoiles à la surface de cette sphère, les anciens avaient imaginé de distinguer les groupes qu'elles forment çà et là et d'y superposer des figures d'hommes ou d'animaux : ce sont les *constellations*.

Ainsi le groupe de 7 étoiles assez brillantes (*fig.* 15), formant, à l'intérieur du cercle de perpétuelle apparition, un trapèze suivi d'une longue queue de trois étoiles, a pris le nom de la *Grande Ourse*. La constellation de la Petite Ourse a même figure, mais une autre position (1). L'étoile qui se trouve à l'extrémité de la

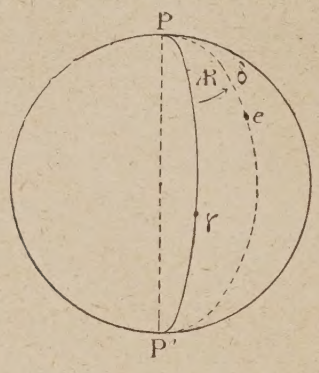
Fig. 16.

queue est la Polaire et désigne à peu près la position du pôle visible. Orion est un grand rectangle (*fig.* 16), portant à l'intérieur trois belles étoiles très voisines qui figurent le baudrier de

(1) Cette région des Ourses célestes s'appelle *région arctique*, du grec ἄρκτος, *Ourse;* de là aussi le nom de *pôle arctique*, donné au pôle céleste qui, pour notre hémisphère, se trouve au-dessus de l'horizon.

ce chasseur céleste. Il est suivi de la constellation du Grand Chien, dont l'œil est Sirius, la plus belle étoile du ciel. Les anciens astronomes se reconnaissaient ainsi dans le ciel, grâce à ces configurations dont l'idée remonte à la plus haute antiquité. On s'en sert encore, dans les observations à l'œil nu, pour indiquer la place où l'on a vu quelque phénomène, une comète, une étoile filante, un bolide. Mais pour l'étude plus scientifique du ciel, on a recours à un système de coordonnées sphériques dont l'axe sera naturellement la ligne des pôles PP′. Chaque étoile *e* est déterminée par sa distance P*e* au pôle, ou δ, et par l'angle dièdre γ P*e*, compris entre son méridien P*e* et un méridien de convention Pγ. Cet angle dièdre se nomme l'*ascension droite* $\mathrm{A\!R}$ de l'étoile *e*. Il se compte à partir du méridien du point γ dans le sens direct, de 0^{o} à 360^{o} ou de 0^{h} à 24^{h}.

Fig. 17.



Ainsi, les coordonnées uranographiques d'une étoile quelconque *e* seront :

P*e* ou distance polaire de l'étoile = δ,

γ P*e* ou ascension droite de l'étoile = $\mathrm{A\!R}$.

Coordonnées géographiques.

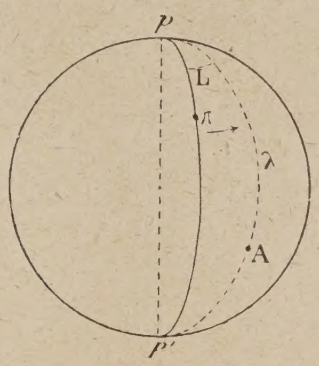
De même, pour décrire le globe terrestre, nous rapporterons les points de sa surface, considérée comme sphérique, à l'axe de rotation de la Terre *pp*′, lequel se confond avec l'axe de rotation du ciel PP′. Un point A de ce globe sera donné par

*p*A, distance polaire ou colatitude λ,

πpA, angle dièdre ou longitude L.

Cet angle dièdre sera compté, comme le précédent, dans le sens direct, de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, à partir d'un méridien terrestre pris comme point de départ (1). En France, on compte les longitudes géographiques à partir du méridien de Paris; en Angle-

Fig. 18.



terre, à partir du méridien de Greenwich. Les colatitudes λ se comptent à partir du pôle Nord p, de 0° à 180°.

On voit qu'il y a un axe commun à ces trois systèmes. Il en résulte entre eux des relations fondamentales que nous allons exposer; elles conduisent à l'une des plus grandes applications que l'on ait jamais faites des sciences, à savoir l'art de déterminer dans le ciel la position qu'un observateur occupe sur le globe terrestre.

Relation mutuelle de ces trois systèmes de coordonnées sphériques.

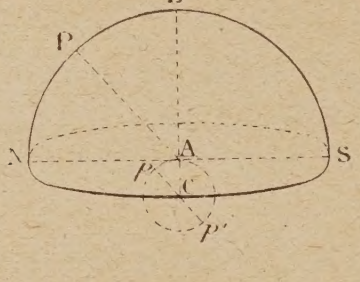
Reprenons les coordonnées locales des étoiles. Le plan fondamental de ce système, c'est-à-dire le méridien du lieu, passe par l'axe AP et par la verticale AZ. L'angle ZAP peut être mesuré soit avec l'équatorial que nous avons décrit sommairement, soit avec d'autres instruments dont il sera question plus loin. Cet angle est la distance zénithale du pôle. Évidemment, il varie quand l'observateur change de position sur le globe, en marchant dans le sens d'un méridien terrestre. L'aspect du ciel change alors pour lui

(1) Par contre, sur la plupart des cartes géographiques, la longitude est comptée en degrés, de 0° à 180°, vers l'Ouest ou vers l'Est à partir du méridien national. Si la longitude doit être affectée d'un signe, on la compte alors positivement vers l'Ouest, négativement vers l'Est.

parce que l'horizon, perpendiculaire à AZ, s'incline de plus en plus, ou de moins en moins, sur l'axe de rotation du ciel. Sans avoir besoin de faire ici une figure, on verra bien que, si l'angle ZAP était nul, l'observateur se trouverait posté au pôle même; toutes les étoiles décriraient, dans leur mouvement diurne, des cercles parallèles à l'horizon; il n'y aurait plus d'astres qui se lèvent ou se couchent. Si, au contraire, l'angle ZAP était de 90°, l'observateur se trouverait sur l'équateur terrestre, à égale distance de l'un ou l'autre pôle; l'horizon passerait par la ligne des pôles; il n'y aurait plus d'étoiles circumpolaires toujours visibles ni d'étoiles constamment invisibles; tous les astres resteraient un demi-jour au-dessus de l'horizon et un demi-jour au-dessous. Ainsi, il y a des relations intimes entre l'aspect du ciel, ou les coordonnées locales des étoiles, et la situation géographique de l'observateur.

Première relation. — Elle consiste en ce que ZAP (*fig.* 19), ou

Fig. 19.



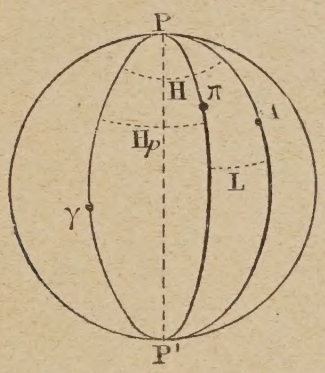
distance zénithale du pôle céleste en un lieu quelconque, est égale à la colatitude λ de ce lieu, c'est-à-dire à sa distance sphérique pA au pôle terrestre p.

En effet, l'arc pA, sur la sphère terrestre, répond à l'angle pCA compris entre l'axe de rotation pp' et le rayon CA qui aboutit à l'observateur. Construisons autour de lui l'horizon, la sphère céleste, le pôle P et le zénith Z. Pour ce dernier, il suffira de prolonger le rayon CA; quant au premier, on mènera par A une parallèle AP à CP, car les dimensions de ce globe terrestre, que nous avons amplifiées, sont nulles vis-à-vis de celles de la sphère céleste. En d'autres termes, l'axe de rotation de la sphère céleste est déterminé par la seule condition d'être parallèle à celui de la Terre et de passer par l'œil de l'observateur. Par conséquent, $p\text{CA} = \lambda$ est la même chose que PAZ, ou distance zénithale du pôle.

De là cette conséquence capitale. Un observateur placé en un lieu A quelconque du globe terrestre peut, sans se déplacer, déterminer l'arc pA qui exprime sa distance au pôle nord de la Terre. Pour cela, il lui suffit de mesurer dans le ciel la distance angulaire du pôle au zénith. L'équatorial dont nous avons parlé plus haut lui donnerait cette mesure, car la verticale s'obtient toujours à l'aide du fil à plomb ou du niveau.

Deuxième relation. — Elle consiste en ce que la longitude πpA du point A, comptée à partir du méridien $p\pi$ de Paris, est égale à l'heure du lieu à un certain instant quelconque, moins l'heure de Paris au même instant. Pour le prouver, il suffit d'une figure montrant, au même instant, l'angle horaire du point γ en A et en π. Puisque les dimensions de la Terre sont évanouissantes par rap-

Fig. 20.



port à celles de la sphère céleste, projetons à cet instant les lieux A et π sur cette sphère, et notons en même temps la position actuelle du point γ. L'heure sidérale du lieu A est $H = \gamma PA$, celle de Paris $H_\pi = \gamma P\pi$. La longitude du lieu A par rapport à Paris est πPA. Or, la figure montre que

$$\pi PA = \gamma PA - \gamma P\pi;$$

donc

$$L = H - H_\pi.$$

Ainsi un observateur, en un lieu A quelconque sur le globe terrestre, peut, sans se déplacer, déterminer l'angle de son méridien avec celui de Paris, c'est-à-dire sa seconde coordonnée géographique. Pour cela, il lui suffit de connaître, à un moment quel-

conque, l'heure du lieu et celle qu'on noterait au même instant à Paris.

Il est évident que tous les lieux situés sur un même parallèle du globe terrestre ont même colatitude, et que les lieux situés sur un même méridien ont même heure et même longitude.

Voilà comment il se fait que la Géographie, c'est-à-dire la connaissance du globe terrestre, est une dépendance immédiate de l'Astronomie; c'est ainsi que les navigateurs déterminent chaque jour leur position au milieu des mers par de simples observations célestes.

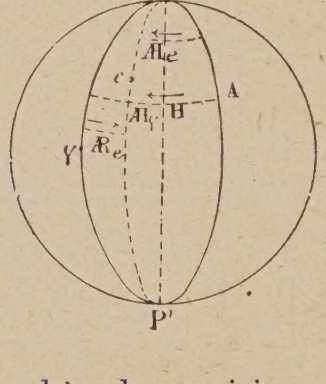
Troisième relation. — Ce n'est pas la moins importante. Elle consiste en ce que l'heure sidérale d'un lieu A est égale non seulement, comme nous l'avons vu, à l'angle horaire $\measuredangle H_\gamma$ du point γ, mais aussi à l'angle horaire $\measuredangle H_e$ d'une étoile quelconque e augmenté de son ascension droite $\measuredangle R_e$, en sorte qu'on a

$$H = \measuredangle H_\gamma = \measuredangle H_e + \measuredangle R_e,$$

e désignant une étoile quelconque.

En effet, traçons sur la sphère céleste le méridien PA du lieu A,

Fig. 21.



et marquons sur cette sphère les positions occupées par le point γ et l'étoile e à l'heure H du lieu A. Nous aurons

$$\text{APγ} = \text{AP}e + \gamma\text{P}e$$

ou bien

$$H = \measuredangle H_e + \measuredangle R_e.$$

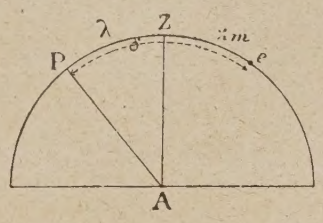
Notez que cette relation suppose que les $\measuredangle R$ sont comptés dans le sens direct, vers la droite, ainsi que nous en sommes convenus,

tandis que les $\mathcal{H}$ le sont dans le sens rétrograde, c'est-à-dire vers la gauche de la figure.

Les astronomes s'attachent à déterminer avec la plus grande exactitude les coordonnées uranographiques $\mathcal{R}$ et δ des principales étoiles. Il est donc facile à tout observateur de choisir parmi elles celle qu'il voudra substituer au point γ pour obtenir l'heure.

De même, un observateur n'a pas à se mettre en peine de déterminer le pôle céleste P pour obtenir $ZP = \lambda$, c'est-à-dire sa colatitude. Il lui suffira de mesurer, dans le méridien de sa station, la distance Ze d'une étoile quelconque au zénith.

Fig. 22.



La figure ci-jointe montre que

$$PZ = Pe - Ze,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \delta - z_m,$$

en désignant par z_m la distance zénithale de l'étoile observée dans le méridien du lieu et par δ la distance polaire de cette étoile fournie par les astronomes.

On remarquera qu'au moment où l'étoile e passe au méridien, son angle horaire est nul; la relation

$$H = \mathcal{H}_e + \mathcal{R}_e$$

se réduit à

$$H = \mathcal{R}_e.$$

Par conséquent, l'ascension droite $\mathcal{R}$ d'une étoile n'est autre chose que l'heure marquée par une pendule sidérale bien réglée quand ladite étoile passe au méridien du lieu.

Enfin, pour déterminer le pôle indépendamment des coordonnées uranographiques des étoiles, il suffit de remarquer que toute étoile circumpolaire passe deux fois en 24 heures au méridien d'un lieu quelconque A, une première fois en e, au-dessus du pôle, et une seconde fois en e', au-dessous.

Comme $Pe = Pe' = \delta$, on aura

$$Ze' - Ze = 2Pe = 2\delta,$$
$$Ze' + Ze = 2ZP = 2\lambda.$$

La seconde relation montre qu'on a la distance du pôle au zénith du lieu par la demi-somme des distances zénithales d'une même étoile observée, dans le méridien, à son passage supérieur et à son passage inférieur. Quant au zénith, il est toujours obtenu, à volonté et avec précision, soit par le fil de plomb, soit par le niveau à bulle d'air.

En récapitulant ces relations si simples, conséquences immédiates de la stabilité de l'axe de la sphère céleste et de l'uniformité de sa rotation, on voit que l'astronome parviendra aisément à déterminer les coordonnées uranographiques des astres, et que le voyageur ou le marin, en possession de ces premiers résultats astronomiques, saura déterminer les coordonnées géographiques de tous les lieux de la Terre.

Par la première, on a la colatitude du lieu en mesurant la distance zénithale du pôle.

Par la deuxième, on a l'heure sidérale du lieu, à un instant donné, en mesurant, à cet instant, l'angle horaire d'une étoile connue.

Pour la troisième, on a la longitude en comparant l'heure du lieu, à un instant donné, à celle que l'on compte à Paris, au même instant.

Toute l'Astronomie sphérique est là. Il ne nous reste plus qu'à exposer en détail les moyens d'exécution applicables en tel ou tel cas, et les procédés que possède la Science pour donner aux résultats la plus grande exactitude possible.

Usage des globes céleste ou terrestre.

Dans une foule de questions d'Uranographie ou de Géographie où l'on peut se contenter d'à peu près, on se sert souvent de globes célestes ou terrestres, c'est-à-dire de sphères sur lesquelles on a figuré les étoiles ou les points principaux du globe terrestre. Ces globes tournent autour d'un axe dont les deux bouts sont engagés dans un limbe en bois ou en cuivre qui représente un méridien. Ce

limbe est porté lui-même verticalement par un second limbe horizontal figurant l'horizon. En faisant glisser le premier dans les rainures du second, on donne à l'axe de la sphère l'inclinaison voulue pour représenter la position du pôle en un lieu donné. Cette inclinaison est le complément de la colatitude du lieu. Si l'on veut avoir la position des étoiles sur l'horizon du lieu à une heure donnée, par exemple au moment où $H = 1^h$, on amènera sous le limbe vertical le méridien céleste qui coupe l'équateur à la division 1^h. Alors les étoiles qui ont 1^h d'ascension droite se trouveront sous ce méridien; celles qui se lèvent ou se couchent à 1^h, pour ce lieu-là, se trouveront dans le plan du limbe horizontal. Avec un pareil globe, qu'on identifie ainsi avec le ciel, il sera aisé de retrouver dans le ciel les constellations, les principales étoiles, et de se familiariser avec l'Astronomie qu'on peut faire à l'œil nu, sans instruments.

Par une disposition analogue, le globe terrestre permettra de répondre à diverses questions de Géographie. Veut-on, par exemple, savoir en quels lieux de la Terre le Soleil se lève, en un jour donné, quand il est midi à Paris ? On commencera par amener l'axe du globe sous l'inclinaison voulue pour que le Soleil se trouve au zénith du cercle horizontal. Cette inclinaison est le complément de la distance polaire du Soleil. Puis on fera tourner le globe jusqu'à ce que Paris vienne se placer sous le méridien vertical. Enfin, on cherchera les points du globe marqués alors par le limbe horizontal. Puisque la Terre tourne de droite à gauche devant le Soleil, les points pour lesquels cet astre se lève se trouveront à la partie du limbe située à droite, c'est-à-dire dans l'ouest. Enfin, veut-on savoir quelle heure il est à New-York quand il est midi à Paris ? Aucune manœuvre n'est nécessaire; il suffira de lire sur le globe la division de l'équateur qui répond au méridien de New-York. On trouvera, si la division est tracée en heures d'après nos conventions, $18^h\,55^m$ en temps astronomique ou $6^h\,55^m$ du matin en langage civil. Une dépêche câblée de New-York à $6^h\,55^m$ du matin arrive presque instantanément à Paris, mais à Paris il est midi.

Nous donnons ici un tableau des coordonnées uranographiques des plus belles étoiles et un autre tableau des coordonnées géographiques des principaux lieux du globe terrestre.

Coordonnées uranographiques des étoiles principales (pour 1924).

Noms.	Asc. droite.	Décl.	Grandeur.	
	h m s	° ′ ″		
α Andromède (Sirrah).....	0. 4.27	28.40.15 N	2,1	double
α Petite Ourse (Polaire).....	1.33.43	88.53.53 N	2,1	double
α Éridan (Achernar).....	1.34.53	57.37.21 S	0,6	
α Bélier (Hamal).....	2. 2.53	23. 6.14 N	2,2	
β Persée (Algol).....	3. 3.13	40.39.50 N	2,3—3,5	double
α Taureau (Aldébaran).....	4.31.33	16.21.28 N	1,1	
α Cocher (La Chèvre).....	5.11. 4	45.55.21 N	0,2	double
β Orion (Rigel).....	5.10.53	8.17.18 S	0,3	
α Carène (Canopus).....	6.22.16	52.39.14 S	—0,9	
α Grand Chien (Sirius).....	6.41.48	16.36.41 S	—1,6	double
α Petit Chien (Procyon).....	7.35.19	5.25.15 N	0,5	double
α Hydre (Alphard).....	9.23.51	8.19.42 S	2,2	
α Lyon (Régulus).....	10. 4.20	12.20.21 N	1,3	
α_1 Croix (Acrux).....	12.22.21	62.40.41 S	1,6	double
α Vierge (L'Épi).....	13.21.11	10.45.54 S	1,2	double
α Bouvier (Arcturus).....	14.12.12	19.34.39 N	0,2	
α Balance.....	14.46.40	15.43.37 S	2,9	
α Couronne (Margarita).....	15.31.28	26.50.10 N	2,3	
α Scorpion (Antarès).....	16.24.45	26.15.53 S	1,2	double
α Triangle austral.....	16.40.36	68.53.26 S	1,9	
α Lyre (Véga).....	18.34.22	38.42.43 S	0,1	
α Aigle (Altaïr).....	19.47. 5	8.39.59 N	0,9	
α Paon.....	20.19.39	56.58.48 S	2,1	
α Cygne (Deneb).....	20.38.50	45. 0.29 N	1,3	
α Poisson austral (Fomalhaut).	22.53.27	30. 1.32 S	1,3	
α Pégase (Markab).....	23. 0.58	14.47.46 N	2,6	

Coordonnées géographiques de quelques points de la Terre.

	Longitude rapportée à Greenwich.	Latitude.
	o m s	o ′ ″
Paris (observatoire)	0. 9.21 E	48.50.11 N
Alger (phare)	0. 2.16 E	36.47.16 N
Genève (observatoire)	0.24.37 E	46.11.59 N
Rome (Saint-Pierre)	0.49.49 E	41.54. 6 N
Berlin (observatoire)	0.53.35 E	52.30.17 N
Vienne (Saint-Étienne)	1. 5.31 E	48.12.33 N
Cap de Bonne-Espérance (observ.)	1.13.55 E	33.56. 3 S
Greenwich (observatoire)	0. 0. 0	51.28.38 N
Constantinople (Sainte-Sophie)	1.55.56 E	41. 0.30 N
Pétrograd (obs. de l'Acad. des Sc.)	2. 1.13 E	59.56.30 N
Aden (bureau du tél.)	2.59.56 E	12.46.40 S
Bombay (château)	4.51.22 E	18.55.53 S
Calcutta (fort William)	5.53.21 E	22.33.25 S
Saïgon (observatoire)	7. 6.48 E	10.46.47 N
Pékin (observatoire)	7.45.53 E	39.54.23 N
Sydney (observatoire)	10. 4.49 E	33.51.41 S
Nouméa (fort)	12. 5.49 E	22.16.14 S
Mexico (observatoire)	6.36.32 W	19.26. 1 N
New-York (City Hall)	4.56. 2 W	40.42.44 N
Cayenne (phare)	3.29.27 W	5. 2.50 N
Rio de Janeiro (observatoire)	2.52.41 W	22.54.24 S
Madrid (observatoire)	0.14.45 W	40.24.30 N

Coordonnées zénithales.

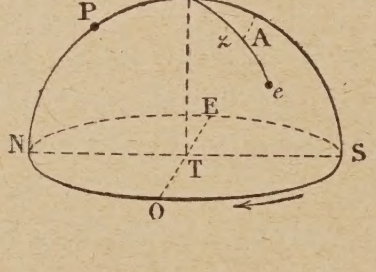
Dans tout ce qui précède, nous avons supposé, pour fixer les idées, qu'on se servait d'une lunette montée équatorialement, pour déterminer les coordonnées des étoiles, la colatitude d'un lieu, l'heure sidérale, etc. Il est bien vrai que cet instrument est employé par les astronomes, mais dans un tout autre but. Il sert à retrouver aisément un astre dans le ciel et à le suivre dans son mouvement diurne. Quand on connaît la distance polaire δ de l'astre cherché, on a recours au limbe gradué, fixé à l'axe propre de la lunette, pour donner à celle-ci l'inclinaison δ sur l'axe principal qui reste parallèle à l'axe du monde. Alors, en faisant tourner l'instrument entier autour de celui-ci, l'axe optique de la lunette parcourra sur le ciel le parallèle de l'astre cherché, et l'on aura bien vite fait

de trouver celui-ci. Lorsqu'on emploie de forts grossissements, le champ de la vision est très restreint; l'astre l'a bientôt traversé, en vertu du mouvement diurne; mais on le suit aisément en faisant tourner, à la main, l'instrument autour de l'axe principal. On adapte même à celui-ci un mouvement d'horlogerie pour lui imprimer une vitesse de rotation exactement égale à celle du ciel, et alors la lunette suit l'astre dans son mouvement et reste ainsi toujours pointée sur lui.

Mais, quand il s'agit de mesures précises, un pareil instrument ne vaut rien. La première condition pour mesurer des coordonnées célestes, c'est de pouvoir retrouver et vérifier à chaque instant la direction de l'axe auquel ces coordonnées se rapportent. Or, ce n'est pas le cas de l'équatorial. Il faut beaucoup de temps pour le régler sur la direction du pôle, et encore n'y parvient-on qu'à peu près. Une fois réglé, je suppose, rien ne garantit qu'il conservera cette direction. Le moindre dérangement introduirait des erreurs intolérables dans la mesure des coordonnées célestes. La seule direction qu'on puisse toujours et à tout instant retrouver avec une précision illimitée, c'est celle de la verticale. Il faut donc adopter, pour les mesures, un système de coordonnées sphériques ayant cette ligne-là pour axe, et un instrument dont l'axe principal soit vertical. Ce système est celui des coordonnées zénithales; l'instrument correspondant est le théodolite.

Soient

Fig. 23.



Z le zénith de l'observateur T;
P le pôle;
SZPN le méridien;
NS la méridienne;
OE une droite menée par T perpendiculairement à la méridienne.

Les quatre points cardinaux seront S, O, N, E. Un point quel-

conque e de la sphère aura pour coordonnées :

$$\text{la distance zénithale } Ze = z,$$
$$\text{l'azimut } SZe = A.$$

Les z se compteront à partir du zénith de 0° à 180° (il suffirait de dire de 0° à 90°, puisque, au-dessous de l'horizon, on ne voit plus rien). Les A se compteront de 0° à 360°, à partir de la partie sud ZS du méridien, dans le sens SONE. Ces conventions comptent pour toute la Terre, aussi bien pour l'hémisphère sud que pour l'hémisphère nord.

Le même système nous servira, en Géodésie, pour rapporter à une station T les divers points du globe terrestre situés sur l'horizon de ce point. Les azimuts seront comptés encore à partir du point cardinal sud, dans le sens où marchent les aiguilles d'une montre posée à plat, c'est-à-dire de gauche à droite : c'est le sens rétrograde.

Mais ces coordonnées zénithales n'ont d'autre mérite que l'extrême précision avec laquelle elles peuvent être obtenues. Elles ne se rapportent en rien au mouvement diurne de la sphère céleste. Pour utiliser les relations que nous venons de formuler, il faut opérer par le calcul une transformation et passer, des coordonnées zénithales d'un point, aux coordonnées du même point par rapport au pôle. Nous allons traiter cette question d'une manière générale avant de décrire le théodolite.

CHAPITRE II.

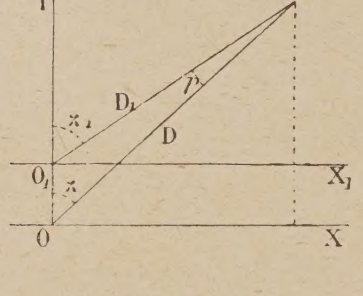
TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Transformation par déplacement de l'origine.

Soit E un point rapporté à l'axe OY et dont les coordonnées soient

$$z = \mathrm{YOE}, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{OE}.$$

Fig. 24.



Si l'origine est transportée en O_1 sur l'axe lui-même (c'est le cas usuel), les nouvelles coordonnées seront

$$z_1 = \mathrm{YO_1E}, \qquad \mathrm{D_1} = \mathrm{O_1E}.$$

Il s'agit d'obtenir les relations qui lient l'une à l'autre ces diverses coordonnées. Prenons pour intermédiaire un système de coordonnées rectilignes rapportées aux axes OY, OX; celles du point E seront

$$y = \mathrm{D}\cos z, \qquad x = \mathrm{D}\sin z,$$

et, si l'origine vient en O_1, on aura

$$y_1 = \mathrm{D_1}\cos z_1, \qquad x_1 = \mathrm{D_1}\sin z_1.$$

Pour passer des unes aux autres, on a, en posant $\mathrm{OO_1} = r$,

les relations

$$x_1 = x,$$
$$y_1 = y - r.$$

Par substitution, il vient

$$D_1 \sin z_1 = D \sin z,$$
$$D_1 \cos z_1 = D \cos z - r.$$

Les astronomes n'ayant que des déplacements d'origine OO_1 ou r extrêmement petits par rapport aux distances des astres D et D_1, ils préfèrent calculer la différence

$$z_1 - z = p. \tag{1}$$

Pour cela, retranchons la deuxième équation de la première, après les avoir multipliées respectivement par $\cos z$ et $\sin z$:

$$D_1 \sin p = r \sin z. \tag{2}$$

Ajoutons-les, après les avoir multipliées par $\sin z$ et $\cos z$:

$$D_1 \cos p = D - r \cos z. \tag{3}$$

On en tire

$$\operatorname{tang} p = -\frac{\frac{r}{D} \sin z}{1 - \frac{r}{D} \cos z}.$$

Les équations (1), (2), (3) contiennent toute la Trigonométrie rectiligne (équations du triangle OO_1E) si l'on remplace z_1 par $EOO_1 = 180^\circ - z_1$. Par exemple, en élevant au carré (2) et (3) et en les ajoutant, on a

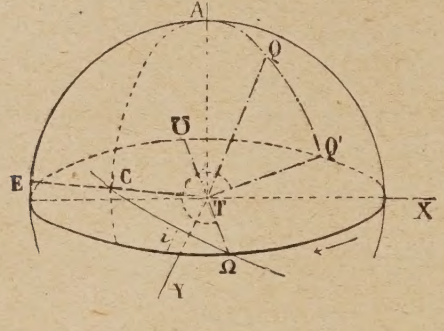
$$D_1^2 = D^2 + r^2 - 2 D r \cos z.$$

Coordonnées sphériques. Manière de représenter une direction ou un plan.

Soient T le centre de la sphère, TA l'axe des coordonnées, XY un grand cercle, un équateur, dont le plan est perpendiculaire à TA, AX le méridien à partir duquel on compte les angles dièdres autour de l'axe TA, de gauche à droite pour un observateur placé

dans l'axe, les pieds sur le plan de l'équateur. Une direction quelconque TCE sera représentée par le point C où la sphère est percée par la droite TE. Faisons passer un méridien AC par ce point; ses

Fig. 25.



coordonnées seront : 1° l'angle dièdre XAC = A; 2° l'arc AC = b, qui mesure l'angle de TE avec TA.

Les angles dièdres A peuvent se compter de 0° à 360° en deux sens opposés autour de l'axe TA, soit de gauche à droite pour un observateur placé le long de l'axe, les pieds sur l'équateur du système, ou bien de droite à gauche. Nous adopterons dans la figure le premier sens. La coordonnée b se compte à partir du point A, de 0° à 180° seulement.

Un plan passant par le centre T coupe la sphère suivant un grand cercle qui rencontre l'équateur sous une inclinaison i, en deux points opposés Ω et ℧. Ces deux points portent les noms de *nœud ascendant* et de *nœud descendant*. Les astronomes ne considèrent que le premier, dont voici la définition : c'est le point où un mobile parcourant ce grand cercle de gauche à droite, sens adopté ici pour le moment, rencontrerait l'équateur en montant de la région inférieure à la région supérieure, c'est-à-dire à celle où se trouve l'axe TA. Pour fixer ce point, il suffit évidemment d'en donner la coordonnée dièdre XA Ω = N qui peut varier de 0° à 360°. Ainsi, les deux éléments qui servent à fixer la position d'un plan passant par T sont i et N, i variant de 0° à 90°.

Comme nous aurons souvent besoin de rapporter une direction ou un plan à des coordonnées rectangulaires, nous prendrons pour axe des z la ligne TA, les z positifs étant comptés, comme TA, au-dessus du plan fondamental; pour axe des X la ligne TX, trace du plan méridien pris pour origine des angles dièdres; pour axe

des Y une droite dirigée dans le plan fondamental à 90° de TX, dans le sens où l'on compte les A.

Si l'on projette le rayon TC $= r$ sur l'axe des z, on aura $z = r \cos b$. Si on le projette sur le plan des XY, on aura $r \sin b$. Cette dernière droite faisant l'angle A avec TX, sa projection sur l'axe des x sera $r \sin b \cos A$ et sa projection sur celui des y sera $r \sin b \sin A$. On aura donc

$$z = r \cos b,$$
$$x = r \sin b \cos A,$$
$$y = r \sin b \sin A,$$

expressions où l'on peut effacer le facteur r en le prenant pour unité.

Quant au plan, son équation sera

$$mz + nx + py = 0,$$

$\frac{m}{c}, \frac{n}{c}, \frac{p}{c}$ étant les cosinus des angles α, β, γ que la normale TQ à ce plan (sa partie située au-dessus du plan des XY) fait avec les axes, en posant

$$m^2 + n^2 + p^2 = c^2.$$

Pour trouver les relations qui doivent exister entre i et N d'une part et ces coefficients de l'autre, projetons TQ sur le plan XY en TQ′. La coordonnée dièdre du point Q aura pour mesure l'arc X Ω Q′, compté dans le sens convenu. Elle est évidemment égale à X Ω + 270° ou à N + 270°. D'après cela, les coordonnées rectilignes du point Q pourront s'exprimer de deux manières :

$$r \cos \alpha, \quad r \cos \beta, \quad r \cos \gamma$$

ou

$$r \cos i, \quad r \sin i \cos (N + 270°), \quad r \sin i \sin (N + 270°).$$

On aura donc les relations

$$\frac{m}{c} = \cos i, \qquad \frac{n}{c} = \sin i \sin N, \qquad \frac{p}{c} = -\sin i \cos N.$$

Condition pour que trois points de la sphère, donnés par leurs coordonnées angulaires, soient sur un arc de grand cercle.

Autrement dit, il faut que les trois points C, C′, C″ soient dans un plan passant par le centre T. Les neuf coordonnées rectilignes

de ces points devront donc satisfaire aux trois relations

$$z + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}y = 0,$$

$$z' + \frac{n}{m}x' + \frac{p}{m}y' = 0,$$

$$z'' + \frac{n}{m}x'' + \frac{p}{m}y'' = 0.$$

La condition cherchée résultera de l'élimination des deux constantes $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ entre ces trois équations. Faisons la somme de ces trois équations, après avoir multiplié la deuxième par λ et la troisième par μ. Les termes en $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ disparaîtront si nous posons :

$$x + \lambda x' + \mu x'' = 0,$$
$$y + \lambda y' + \mu y'' = 0.$$

Les valeurs correspondantes de λ et de μ ont pour expressions

$$\lambda = -\frac{xy'' - yx''}{y'x'' - x'y''}, \qquad \mu = \frac{xy' - yx'}{y'x'' - x'y''}.$$

La condition cherchée sera donc, en chassant le dénominateur dans la somme susdite :

$$(y'x'' - x'y'')z - (xy'' - yx'')z' + (xy' - yx')z'' = 0.$$

Remplaçons ces neuf coordonnées par leurs expressions angulaires, divisons tous les termes par le produit $\sin b \sin b' \sin b''$, et remarquons qu'alors

$$y'x'' - x'y'' \text{ se réduit à } \frac{\sin(A'' - A')}{\sin b},$$

$$xy'' - yx'' \quad » \quad \frac{\sin(A'' - A)}{\sin b'},$$

$$xy' - yx' \quad » \quad \frac{\sin(A' - A)}{\sin b''};$$

nous aurons finalement la condition

$$\sin(A'' - A')\cot b - \sin(A'' - A)\cot b' + \sin(A' - A)\cot b'' = 0.$$

Pour déterminer ce plan, il faudra tirer $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ des deux pre-

mières équations, ce qui donne

$$\frac{n}{m} = -\frac{zy' - yz'}{xy' - yx'} = -\frac{\cot b \sin A' - \cot b' \sin A}{\sin(A' - A)} = \operatorname{tang} i \sin N,$$

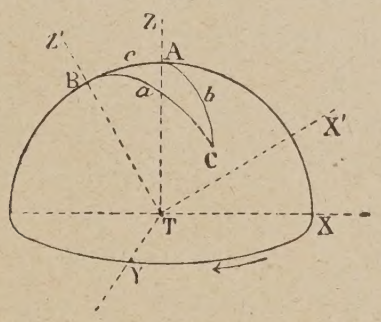
$$\frac{p}{m} = \frac{zx' - xz'}{xy' - yx'} = \frac{\cot b \cos A' - \cos b' \cot A}{\sin(A' - A)} = -\operatorname{tang} i \cos N,$$

d'où l'on tire i et N sans ambiguïté, car, d'après nos conventions, il suffit de prendre $i < 90^0$; tang i est alors positif et le quadrant où il faut prendre N est indiqué par les signes de son sinus et de son cosinus.

Changement de direction de l'axe des coordonnées sphériques.

Nous supposerons que les angles dièdres des deux systèmes soient comptés dans le même sens. Soient donc TA l'axe primitif, A et b les coordonnées d'un point C de la sphère.

Fig. 26.



Inclinons vers la gauche l'axe de ce système d'un angle c, en TB, dans le plan même que nous avons choisi pour origine des angles dièdres A, et prenons ce même plan pour origine des angles dièdres B comptés autour du nouvel axe. Les coordonnées nouvelles de C seront XBC = B, BC = a.

Pour opérer cette transformation, prenons comme intermédiaires les coordonnées rectilignes du point C rapportées aux axes TZ, TX, TY; nous aurons

$$z = \cos b, \qquad x = \sin b \cos A, \qquad y = \sin b \sin A.$$

Faisons tourner les axes TX et TZ de l'angle ATB = c, en appelant z_1, x_1, y_1 les nouvelles coordonnées.

Elles auront pour expressions

$$z_1 = \cos a, \qquad x_1 = \sin a \cos \mathrm{B}, \qquad y_1 = \sin a \sin \mathrm{B}.$$

Les formules de transformation pour les coordonnées linéaires étant

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos c - x \sin c, \\ x_1 &= z \sin c + x \cos c, \\ y_1 &= y, \end{aligned}$$

celles des coordonnées angulaires seront

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos c \cos b - \sin c \sin b \cos \mathrm{A}, \\ \sin a \cos \mathrm{B} &= \sin c \cos b + \cos c \sin b \cos \mathrm{A}, \\ \sin a \sin \mathrm{B} &= \sin b \sin \mathrm{A}. \end{aligned}$$

Ces formules sont absolument générales. Tous les angles peuvent être comptés de 0° à 360°; mais, comme nous n'avons besoin de compter les a, b, c que de 0° à 180°, il n'y aura jamais ambiguïté dans leur interprétation. En effet, pour calculer a et B au moyen de b, A et c, les deux dernières donnent les signes de cos B et sin B, puisque sin a sera toujours positif.

Ces trois équations ne sont pas entièrement distinctes; si on les ajoute après les avoir élevées au carré, on aboutit à l'identité $1 = 1$; mais leur ensemble a l'avantage de faire disparaître toute ambiguïté. Elles s'appliquent au cas où l'on passe du pôle A au pôle B. Pour la transformation inverse, il suffirait de changer a en b, B en A et c en $-c$.

Application de ces formules aux coordonnées célestes.

Introduisons dans ces formules les notations relatives à nos systèmes de coordonnées célestes. Si, après avoir mesuré la distance zénithale z et l'azimut A d'une étoile, en un lieu de colatitude λ, on veut en déduire pour le même instant les coordonnées horaires δ et H, il suffira de remplacer dans les formules précédentes les lettres b, A, c, a, B par z, A, λ, δ, H, ce qui donne

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos\lambda \cos z - \cos\lambda \sin z \cos \mathrm{A}, \\ \sin\delta \cos H &= \sin\lambda \cos z + \cos\lambda \sin z \cos \mathrm{A}, \\ \sin\delta \sin H &= \sin z \sin \mathrm{A}. \end{aligned}$$

Si, au contraire, on avait δ et H, et qu'on en voulût conclure les coordonnées zénithales z et A, on opérerait une simple permutation de lettres en remplaçant λ par $-\lambda$. De là

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos H, \\ \sin z\cos A &= -\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos H, \\ \sin z\sin A &= \sin\delta\sin H. \end{aligned}$$

Il serait bien facile de rendre ces formules calculables, comme l'on dit, *par logarithmes* (1). Les astronomes ne s'en préoccupent guère. L'essentiel pour eux est d'obtenir les résultats avec toute la précision que les Tables comportent. Pour cela, il importe de déterminer les angles par leurs tangentes qui, dans la région la moins favorable des Tables, celle où la différence des logarithmes des tangentes est la plus petite, c'est-à-dire vers 45°, donnent une exactitude double de celle des sinus ou cosinus. Or, en divisant la troisième équation du dernier groupe, par exemple, par la deuxième, on a tang A ; puis, connaissant A sans ambiguïté, puisque les signes de sinA et de cosA sont donnés par les deux dernières, on divise la deuxième ou la troisième par la première et l'on a z par sa tangente.

Il est facile de voir que, si l'angle horaire H croît proportionnellement au temps, il n'en est pas de même de l'azimut A. Il n'y a qu'une chose de commune à ces deux angles dièdres : c'est qu'ils se trouvent du même côté du méridien, à la fois plus petits ou à la fois plus grands que 180°. Ces formules revenant sans cesse dans ce Cours, elles se graveront d'elles-mêmes dans la mémoire.

Ceci est le lieu d'exposer la Trigonométrie sphérique qui est contenue tout entière dans ces formules.

---

(1) En posant $\cos\delta = m\cos\varphi$, $\sin\delta\cos A = m\sin\varphi$, on aura

$$\begin{aligned} \cos z &= m\cos(\varphi - \lambda), \\ \sin z\cos A &= m\sin(\varphi - \lambda), \\ \sin z\sin A &= \sin\delta\sin H. \end{aligned}$$

Rien n'empêche de convenir que m sera positif ; dès lors, φ est obtenu sans ambiguïté.

Trigonométrie sphérique.

Les premières équations se rapporteront au triangle sphérique ABC, à la seule condition d'y remplacer A par son supplément $180^\circ - A$ et de limiter les angles dièdres A, B à 180°. On a ainsi, pour le triangle quelconque ABC,

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A, \tag{1}$$

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A, \tag{2}$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \tag{3}$$

En divisant (2) par (3), on aura une nouvelle forme d'équation :

$$\sin A \cot B = \sin c \cot b - \cos c \cos A. \tag{4}$$

Ces équations s'appliqueront au triangle *supplémentaire* dont les angles sont les suppléments des côtés du triangle ABC et dont les côtés sont les suppléments des angles dièdres du même triangle. On obtiendra donc de nouvelles relations entre les six éléments a, b, c, A, B, C en remplaçant, dans (1) et (2), a par $180^\circ - A$, etc. et réciproquement. Il vient ainsi

$$\cos A = -\cos C \cos B + \sin C \sin B \cos a, \tag{5}$$

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a. \tag{6}$$

La même substitution dans (3) et (4) ne donnerait pas lieu à des formes nouvelles.

Par simple permutation des lettres, on obtiendra trois équations des formes (1), (3), (5) et six des formes (2), (4), (6). Telles sont les relations suffisantes pour résoudre tous les problèmes des triangles sphériques. Remarquons seulement qu'il faut trois données; par suite, les seules relations immédiatement utilisables sont celles qui n'en comprennent que quatre, comme les groupes (1), (3), (5).

Formules calculables par logarithmes.

I. *Formules de Borda.* — En partant de l'équation (1), on a

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b \sin c}.$$

Par une transformation connue (1), on en tire

$$1 - \cos A = - \frac{\cos a + \cos(b - c)}{\sin b \sin c} = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A,$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c} = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A,$$

d'où, en posant $a + b + c = 2s$,

$$(7) \quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin s}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin s}}. \end{cases}$$

On doit prendre le radical positivement, parce que, A ne pouvant dans un triangle dépasser 180°, sa moitié ne peut dépasser 90°.

De même, on déduirait du groupe (5), en posant $A + B + C = 2S$,

$$(8) \quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \end{cases}$$

---

(1) Nous rappelons ici les formules usuelles :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b),$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b),$$

et

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b),$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a+b).$$

II. *Analogies de Delambre et de Neper.* — Écrivons ici les deux premières analogies des sinus :

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$
$$\sin a \sin C = \sin c \sin A.$$

Combinons-les par addition et soustraction, en remplaçant les sommes ou les différences de sinus par des produits :

$$(a)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C) \\ = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b+c), \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C) \\ = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}(b+c). \end{cases}$$

Ces équations, décomposées en facteurs, donnent immédiatement les *équations de Delambre :*

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C) = \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c),$$
$$\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C) = \cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c),$$
$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C) = \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c),$$
$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c).$$

Le produit des deux premières reproduit l'équation (a); le produit des deux dernières reproduit l'équation (b). Pour vérifier la légitimité de cette décomposition, il suffira de remplacer dans les dernières équations les sinus et les cosinus des angles $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ par leurs expressions tirées du groupe (7); elles se réduisent alors à des identités.

Chacune de ces analogies comprend les six éléments du triangle sphérique; mais, en les divisant deux à deux, on obtient les *analogies de Neper,* qui se prêtent parfaitement à la résolution des

triangles. Ce sont :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a. \end{array}\right.$$

On peut établir *directement* les analogies de Neper.

Remplaçant les tangentes des angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ par leurs valeurs tirées des formules de Borda, dans les identités

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}-\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}+\operatorname{tang}\frac{B}{2}}$$

et

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{1+\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}},$$

il viendra, pour la première identité, par exemple,

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}-\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}}{\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}+\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}}.$$

Multipliant tous les radicaux par

$$\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c),$$

et réduisant, il viendra :

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin(p-b)+\sin(p-a)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{tang}(a-b)}{2}\cot\frac{c}{2},$$

d'où les formules, en considérant également le triangle supplémentaire :

$$\operatorname{tang}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.$$

La seconde identité donnera à son tour :

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tang}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2}.$$

Triangles rectangles.

Il suffit de faire $A = 90^0$ dans les trois formules fondamentales (1), (2), (3); elles deviennent :

(1) $\cos a = \cos c \cos b,$

(2) $\sin a \cos B = \sin c \cos b,$

(3) $\sin a \sin B = \sin b,$

d'où, par permutation,

(4) $\sin a \cos C = \sin b \cos c,$

(5) $\sin a \sin C = \sin c.$

En divisant (2) et (4) par (1), puis par (5) et (3), puis par (3)

et (5), respectivement, on aura

$$\text{tang}\, a \cos \mathrm{B} = \text{tang}\, c, \tag{6}$$

$$\text{tang}\, a \cos \mathrm{C} = \text{tang}\, b, \tag{7}$$

puis

$$\frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}} = \cos b, \tag{8}$$

$$\frac{\cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B}} = \cos c, \tag{9}$$

puis

$$\cot \mathrm{B} = \sin c \cot b, \tag{10}$$

$$\cot \mathrm{C} = \sin b \cot c, \tag{11}$$

dont le produit donne enfin

$$\cot \mathrm{B} \cot \mathrm{C} = \cos b \cos c = \cos a. \tag{12}$$

A titre de moyen mnémonique, posons

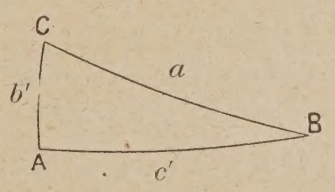
$$b = 90^\circ - b', \qquad c = 90^\circ - c';$$

les équations utilisables pourront être écrites ainsi :

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin c' \sin b', & \cos a &= \cot \mathrm{B} \cot \mathrm{C}, \\
\cos b' &= \sin a \sin \mathrm{B}, & \cos b' &= \cot c' \cot \mathrm{C}, \\
\cos c' &= \sin a \sin \mathrm{C}, & \cos c' &= \cot b' \cot \mathrm{B}, \\
\cos \mathrm{B} &= \sin b' \sin \mathrm{C}, & \cos \mathrm{B} &= \cot a \cot c', \\
\cos \mathrm{C} &= \sin c' \sin \mathrm{B}, & \cos \mathrm{C} &= \cot a \cot b'.
\end{aligned}$$

Si l'on considère l'ordre dans lequel se suivent les cinq quantités b', c', B, a, C, lorsqu'on tourne autour d'un triangle rectangle en sautant l'angle droit A, on voit que le cosinus de l'une d'elles

Fig. 27.



est égal au produit des cotangentes des deux éléments adjacents ou au produit des sinus des deux éléments non adjacents.

Résolution des triangles quelconques.

Étant donnés trois des six éléments d'un triangle, les formules que nous venons d'exposer permettent de calculer les trois autres, de même que la Géométrie permettrait de les construire à l'aide d'une sphère et d'un compas sphérique.

On peut donner :

1° Les trois côtés;
2° Les trois angles;
3° Deux côtés et l'angle compris;
4° Deux angles et le côté commun;
5° Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;
6° Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Inutile d'ajouter que les données doivent satisfaire avant tout aux conditions d'existence des triangles; en d'autres termes, chaque angle ou chaque côté doit être compris entre 0° et 180°, un côté quelconque doit être plus petit que la somme des deux autres, la somme des trois côtés doit être moindre que 360°, et celle des trois angles doit être comprise entre 180° et 540°.

Les quatre premiers cas ne donnent lieu à aucune discussion. Le triangle peut toujours être construit géométriquement, et il est unique; il en sera de même du calcul. Les deux premiers sont tout résolus par les groupes (1) ou (5) et, si l'on tient à employer des formules dites *calculables par logarithmes*, par les groupes (7) ou (8). Les deux cas suivants se ramènent aux premiers par les formules (1) ou (5). Il est plus simple d'y employer les analogies de Neper. Si, par exemple, les données sont b, c, A, on calculera $B - C$ et $B + C$ par les deux premières analogies, puis a par l'une des deux autres.

Les deux premiers cas peuvent conduire à une, à deux solutions ou à une impossibilité. On s'en rend compte aisément par la Géométrie. Si les données sont, par exemple, a, b et B, on construira sur une sphère l'angle dièdre B et sur l'un des côtés on portera le côté a; puis de l'extrémité de ce côté comme centre, on décrira, avec un compas d'ouverture b, un arc de petit cercle qui coupera le côté indéfini de l'angle B en deux points, ou qui le touchera en

un seul, ou ne le rencontrera pas. Il y aura même à examiner, dans le cas de la double rencontre, si les deux solutions sont acceptables. Il nous suffira de faire remarquer que, dans le calcul, on est obligé de se servir d'une analogie des sinus pour obtenir l'angle A :

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Si la valeur qu'on en tire pour sin A est plus grande que 1, le problème n'a pas de solution; il n'en a qu'une si cette valeur est égale à l'unité; il en a deux si $\sin A < 1$, puisque à chaque sinus répondent deux arcs supplémentaires également admissibles pour un triangle. Il reste à savoir, dans ce dernier cas, si les deux solutions sont acceptables et cadrent avec les données. Or, dans tout triangle, de deux côtés, le plus grand est opposé au plus grand angle; en d'autres termes, B — A doit être de même signe que $b - a$. Si les deux valeurs trouvées pour A satisfont à cette condition, il y a deux solutions; autrement il faudra rejeter celle qui n'y répond pas.

Il n'y a pas lieu d'insister beaucoup sur ces discussions, car les astronomes ont l'habitude de se procurer d'avance, par des moyens que nous aurons l'occasion d'exposer, des valeurs approchées des éléments inconnus. D'ailleurs, on ne rencontre pas dans la pratique de triangle impossible, puisque les phénomènes observés sont de toute réalité.

Excès sphérique.

Soit le triangle ABC (*fig. 27 bis*); prolongeons AB de manière à compléter la circonférence. Prolongeons de même AC et BC jusqu'à cette circonférence. L'hémisphère supérieur de la sphère sur laquelle ce triangle est placé se composera de la somme de quatre triangles dont deux, ABC, DCE, forment le fuseau C, tandis que les deux derniers, joints chacun au triangle ABC, donnent les fuseaux A et B. Cela posé, si l'on prend pour unité la surface de la sphère, un fuseau quelconque A sera représenté par $\frac{A}{360^\circ}$, tandis que le triangle ABC, rapporté à la même unité, sera représenté par $\frac{T}{4\pi r^2}$, en désignant par T la surface du triangle en mètres carrés, et par r le rayon de la sphère en mètres.

On aura donc, en remarquant que l'hémisphère a alors pour surface $\frac{1}{2}$,

$$\frac{A}{360^\circ} + \frac{B}{360^\circ} + \frac{C}{360^\circ} - \frac{2T}{4\pi r^2} = \frac{1}{2},$$

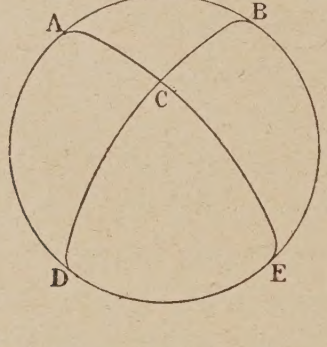
d'où

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{360^\circ}{2\pi} \times \frac{T}{r^2} = 180^\circ + 206\,265'' \frac{T}{r^2}.$$

Ce terme $206\,265'' \frac{T}{r^2}$ est ce qu'on nomme *excès sphérique* ε; c'est l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux droits.

Dans les triangles géodésiques dont les côtés ont ordinai-

Fig. 27 *bis*.



rement 6, 8 ou 10 lieues, cet excès se réduit à 1″ ou 2″ ou 3″ (1). On l'obtient aisément en calculant la surface du triangle en mètres carrés comme s'il était plan, et en réduisant en secondes le rapport de cette surface au carré du rayon. Si les angles du triangle ABC ont été bien mesurés, l'excès de leur somme sur 180° doit être égal à cet excès sphérique.

---

(1) On voit pourquoi les triangles sphériques de la Géodésie ne sont pas déterminés par leurs trois angles. Les formules (8) de la page 61 ne sont pas applicables, car $S = 90^\circ + \frac{1}{2}\varepsilon$ ne diffère de 90° que d'un angle excessivement petit, dont la grandeur est de l'ordre même des erreurs d'observation. Il faut donc au moins un côté, comme pour les triangles plans.

Sur les calculs trigonométriques.

Avant tout, il faut se rendre compte du degré de précision des données, afin d'y proportionner la précision des calculs. Si les observations sont faites à la minute ou même au dixième de minute près, des logarithmes à 5 décimales suffisent. Si elles prétendent à la précision de la seconde, on emploiera des Tables à 6 ou même à 7 décimales. Dans les calculs relatifs aux opérations géodésiques de haute précision, on se sert des Tables à 8 décimales publiées par le Service Géographique de l'Armée.

Quel que soit le nombre des décimales, le dernier chiffre d'un logarithme pris par interpolation dans la Table sera affecté d'une erreur comprise entre 0 et 1. Entre ces limites, toutes les erreurs sont également probables; au delà, elles sont impossibles (sauf le cas, excessivement rare, d'une faute d'impression). Il est essentiel de remarquer que ces erreurs sont indifféremment en plus ou en moins : la probabilité est absolument la même pour les deux cas.

Cela posé, lorsqu'on combine plusieurs logarithmes par voie d'addition ou de soustraction, comme dans tous les calculs dont nous aurons à nous occuper, il y aura une compensation au moins partielle des erreurs dont ils seront affectés, puisque celles-ci sont positives pour les uns, négatives pour les autres. Cette compensation spontanée d'erreurs qui se produisent indifféremment dans un sens ou dans l'autre, et qu'on pourrait appeler *fortuites*, joue un si grand rôle en Astronomie et même dans toutes les sciences d'observation et de mesure, que nous devons nous y arrêter un moment pour en donner une preuve de fait.

Prenons, dans une Table à 5 décimales, les 20 premiers logarithmes et faisons-en la somme. Chacun de ces nombres (il s'agit de logarithmes irrationnels) est affecté d'une erreur comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$ unité du 6^{e} ordre décimal. L'erreur résultante s'obtiendra avec une très grande précision si nous faisons la même somme au moyen d'une Table à 7 décimales. On trouve alors que l'erreur, qui pourrait en toute rigueur s'élever à près de 10 unités, n'est que de $-1,66$. Il y a donc une large compensation d'erreurs. Si l'on répète cette expérience sur les 20 logarithmes suivants, on trouve que l'erreur est $+2,16$. En opérant ainsi 20 fois de suite,

on obtient les résultats suivants :

13	erreurs comprises entre	0 et 1,
4	»	1 et 2,
2	»	2 et 3,
1	erreur comprise entre	3 et 4.

Ainsi, une compensation partielle des erreurs est énormément plus probable que leur accumulation soit dans un sens, soit dans l'autre. Le calcul des probabilités, appliqué à cette question, montre qu'il y a

2 432 900 000 000 000 000

à parier contre 1 que la somme de 20 logarithmes pris au hasard ne sera pas en erreur d'une quantité comprise entre 9 et 10 unités du dernier ordre.

Dans le calcul des formules trigonométriques, l'erreur à craindre sur le résultat, en tant qu'elle provient des Tables et de l'interpolation, est d'environ 1 unité du dernier ordre décimal.

Il est aisé, d'après cela, de juger du degré de précision qu'on atteindra avec une Table à 5 décimales. Les angles étant obtenus par leurs tangentes, consultons la région la plus défavorable, celle où la différence de deux logarithmes tangentiels consécutifs est la plus petite. Nous trouvons que, vers 45°, cette différence est de 26 pour 1′. L'erreur probable de 1 unité introduira donc dans l'angle conclu une erreur de $\frac{1'}{26}$, c'est-à-dire d'un peu plus de 2″. L'erreur serait 100 fois moindre, c'est-à-dire d'un peu plus de 0″,02, si l'on avait recours aux Tables à 7 décimales.

Il est très facile d'acquérir l'habitude du calcul, pourvu qu'on observe les prescriptions suivantes, qui tiennent à un ordre d'idées connu sous le nom de *division du travail*. En premier lieu, inscrire avec soin les données numériques et réunir les formules à employer; en second lieu, faire le tableau des calculs en blanc, de manière à n'avoir plus qu'à y porter les nombres, Par exemple, s'il s'agit d'appliquer la formule

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}},$$

on dressera d'abord le tableau suivant :

a	$\log \sin(s-b)$
b	$\log \sin(s-c)$
c	$\operatorname{colog} \sin s$
$2s$	$\operatorname{colog} \sin(s-a)$
s	$\log \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A$
$s-a$	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$
$s-b$	$\frac{1}{2} A$
$s-c$	A

Vérif. somme $= s$

Alors on ouvre la Table de logarithmes, et l'on n'a plus à se préoccuper que de ne pas commettre d'erreurs de transcription. Quant aux additions ou soustractions, il est de règle de n'en jamais passer une sans la vérifier immédiatement. Les parties proportionnelles se calculent sur une petite feuille séparée, afin de ne pas gâter l'aspect des calculs, car si les calculs sont bien écrits, bien ordonnés, et qu'une faute vienne à s'y glisser, un coup d'œil sur la marche des nombres suffit souvent pour la faire reconnaître.

Les Tables à 3, 4 ou 5 décimales sont si commodes que les astronomes s'attachent le plus souvent à ramener ces calculs à leur emploi. Pour cela, ils se servent du développement des formules en série, lorsque cela est praticable, c'est-à-dire lorsque celles-ci renferment une ou plusieurs quantités assez petites pour que leur carré ou leur cube, etc., soit négligeable.

Formules différentielles des triangles sphériques.

Ces formules sont d'un continuel usage en Astronomie.

En effet, les mesures des coordonnées des astres ou des éléments de certains triangles sont toujours affectées d'erreurs plus ou moins sensibles; il importe donc d'apprécier l'influence que ces erreurs peuvent avoir sur les éléments conclus, angles ou côtés. Ces erreurs étant toujours très petites, de sorte que leurs puissances supérieures à la première sont parfaitement négligeables, on est autorisé à les traiter comme de simples différentielles du premier

ordre. Dès lors, en différentiant les équations du triangle par rapport aux éléments affectés d'erreurs, on obtiendra les relations nécessaires.

Supposons, par exemple, que dans le triangle ABC, la mesure du côté c soit affectée d'une erreur $\pm dc$: quelle sera l'influence que cette erreur exercera sur les éléments conclus a, B, C ? Il suffira, pour l'apprécier, de différentier les équations fondamentales (1), (2), (3) par rapport à c, a, B, et comme l'angle C n'y entre pas, on y joindra une équation du groupe (1) :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Par (1) on aura, A et b étant invariables,

$$-\sin a\, da = (-\sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A)\, dc,$$

d'où, en tenant compte de (2),

$$da = \cos B\, dc.$$

L'analogie (3) donnera

$$\cos a \sin B\, da + \sin a \cos B\, dB = 0,$$

d'où

$$\sin a\, dB = -\cos a \sin B\, dc.$$

Enfin, la relation susdite en cos c donne

$$-\sin c\, dc = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C)\, da - \sin a \sin b \sin C\, dC$$

ou bien

$$\sin c\, dc = \sin c \cos B\, da + \sin a \sin b \sin C\, dC.$$

En y portant la valeur de da et en comparant avec la troisième analogie des sinus, on aura

$$\sin a\, dC = \sin B\, dc.$$

Ainsi, une erreur sur le côté mesuré c aura d'autant plus d'influence sur les angles conclus B et C que le côté a sera plus petit. Comme les triangles célestes sont perpétuellement variables, cela nous avertit de ne mesurer les éléments du triangle ACB, dont on a besoin pour en conclure B et C, que lorsque le côté a aura acquis une grandeur suffisante.

On obtient souvent les mêmes résultats par la Géométrie, plus

simplement que par le calcul. Soient BD (sans figure) l'erreur infiniment petite commise sur le côté AB, et E la projection du point D sur CB. Le triangle élémentaire BDE, rectangle en E, donne

$$BE = BD \cos B \qquad \text{ou} \qquad da = \cos B \, dc,$$

puis

$$DE = BD \sin B.$$

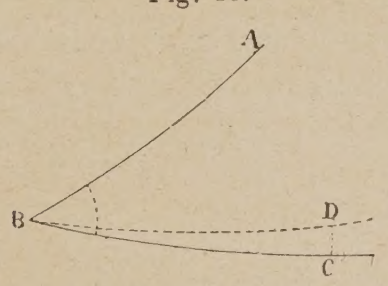
Or, le triangle rectangle DEC donne, par l'analogie des sinus,

$$\frac{\sin DCE}{\sin DE} = \frac{1}{\sin DC} \qquad \text{ou} \qquad \sin a \, dC = \sin B \, dc,$$

en tenant compte du sens attribué à BD sur la figure.

C'est ici le lieu de faire une remarque importante. Quand on voit figurer dans une formule de ce genre les différentielles des angles dièdres mêlées à celles des côtés, on observe que les premières sont toujours multipliées par le sinus du côté variable de l'angle dièdre. Cela tient à ce que dB et da ne sont pas des quantités de même espèce; da est une portion d'arc de grand cercle; dB, à lui seul, n'exprime rien de semblable. Les variations des coordonnées d'un point doivent représenter les petits déplacements de ce point mesurés sur des arcs de grand cercle. Si le point C, par exemple, a pour coordonnées $BC = z$ et CBA ou B, dz représentera un déplacement du point C dans le sens BC; dB n'exprimerait qu'une variation de l'angle dièdre B qui laisse indéterminé le déplacement du point C dans le sens perpendiculaire à BC. Pour définir celui-ci, il faut écrire $\sin z \, dB$, forme qui exprimera, comme dz, un petit déplacement linéaire CD.

Fig. 28.



Nous n'insisterons pas davantage sur ces relations différentielles, parce que nous aurons sans cesse occasion d'y revenir. Il suffira de les indiquer au fur et à mesure des besoins.

Développement en série des fonctions trigonométriques. Développement de Lagrange.

Les astronomes font un continuel usage de ces développements lorsqu'il se présente, dans les formules, des angles ou des arcs assez petits pour qu'on soit en droit d'en négliger les puissances supérieures. Ils réduisent ainsi ces formules à de petits termes pour lesquels des Tables à trois ou quatre décimales suffisent amplement. Le procédé général consiste dans l'application de la série de Maclaurin. Une fonction $y = f(x)$ peut être mise sous la forme

$$y = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots,$$

pourvu que cette fonction et ses dérivées restent continues dans l'intervalle où on les emploie, et que la série soit convergente.

C'est ainsi que peuvent s'obtenir les développements en série des lignes trigonométriques, dont les astronomes et les géodésiens font un fréquent usage.

Voici un *exemple* d'application du procédé général.

Prenons l'équation des triangles rectangles

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B.$$

Si B n'est pas très grand, c différera peu de a, et il y aura avantage à développer $c - a$ en série procédant suivant les puissances ascendantes, non pas de cos B, mais d'une autre fonction de B dont les puissances décroissent très rapidement. Posons

$$\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = x, \qquad \text{d'où} \qquad \cos B = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

En portant cette expression dans celle de tang $(c - a)$,

$$\operatorname{tang}(c - a) = \frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a} = \frac{\operatorname{tang} a (1 - \cos B)}{1 + \operatorname{tang}^2 a \cos B},$$

on aura, toutes réductions faites,

$$c - a = \operatorname{arc\,tang} \frac{-x \sin 2a}{1 + x \cos 2a} = f(x).$$

En différentiant $f(x)$ plusieurs fois de suite :

$$f'(x) = \frac{-\sin 2a}{1 + x^2 + 2x \cos 2a}, \qquad f''(x) = \frac{2x \sin 2a + \sin 4a}{(1 + x^2 + 2x \cos 2a)}, \qquad \dots$$

Il n'y aura plus qu'à faire $x = 0$ dans $f(x)$ et ses dérivées, ce qui donne

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = -\sin 2a, \qquad f''(0) = \sin 4a, \qquad \ldots,$$

et l'on aura, en mettant pour x sa valeur,

$$c - a = -\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B.\sin 2a + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} B.\sin 4a - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^6 \frac{1}{2} B.\sin 6a + \ldots.$$

Lagrange a donné une autre méthode plus simple et plus élégante pour obtenir ces développements d'une manière purement algébrique en employant les expressions des lignes trigonométriques en exponentielles imaginaires.

Reprenons l'expression

$$\operatorname{tang} c = \frac{1 - x}{1 + x}\operatorname{tang} a \qquad \text{avec} \qquad x = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(c - a) = \frac{-x \sin 2a}{1 + x \cos 2a}.$$

Les expressions des lignes trigonométriques en exponentielles imaginaires étant

$$\sin x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{r} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

nous aurons

$$\frac{e^{i(c-a)} - e^{-i(c-a)}}{e^{i(c-a)} + e^{-i(c-a)}} = \frac{-x(e^{2ia} - e^{-2ia})}{2 + x(e^{2ia} + e^{-2ia})}.$$

Combinons les deux termes de chaque fraction par voie d'addition et de soustraction ; il viendra :

$$\frac{2\,e^{i(c-a)}}{2\,e^{-i(c-a)}} = e^{2i(c-a)} = \frac{1 + x\,e^{-2ia}}{1 + x\,e^{2ia}},$$

d'où, en prenant les logarithmes népériens des deux membres et développant ceux du second par la formule

$$(x < 1) \qquad \mathrm{L}(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

nous aurons

$$2i(c - a) = x\,e^{-2ia} - \frac{1}{2}x^2\,e^{-4ia} + \frac{1}{3}x^3\,e^{-6ia} - \ldots$$

$$- x\,e^{2ia} + \frac{1}{2}x^2\,e^{4ia} - \frac{1}{3}x^3\,e^{6ia} + \ldots;$$

divisons par $2i$ et repassons des exponentielles aux sinus, nous retomberons sur la série précédemment obtenue :

$$c - a = -\sin 2a \tang^2 \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} \sin 4a \tang^4 \frac{1}{2} B - \frac{1}{3} \sin 6a \tang^6 \frac{1}{2} B + \dots.$$

Ceci nous montre que, si B est du premier ordre de petitesse, $c - a$ sera du second ordre.

Le développement en série de $L(1+x)$ exige $x < 1$ pour que la série soit convergente. Il faut donc que nous ayons à la fois :

$$\text{mod} \mid x e^{2ai} \mid < 1, \qquad \text{mod} \mid x e^{-2ai} \mid < 1 ;$$

or ces deux modules sont les mêmes,

$$\text{mod} \mid x e^{2ai} \mid = \text{mod} \mid x e^{-2ai} \mid = \sqrt{x^2 \cos^2 2a + x^2 \sin^2 2a} = x,$$

ainsi la série sera convergente tant que $x = \tang^2 \frac{1}{2} B < 1$, c'est-à-dire tant que B sera inférieur à 90°. Si nous supposions c connu et que nous voulions calculer l'hypoténuse a, il suffirait de mettre l'équation précédente sous la forme

$$\tang a = \tang c \sec B.$$

Comme

$$\frac{1 - \sec B}{1 + \sec B} = -\tang^2 \frac{1}{2} B,$$

il suffira de permuter a et c dans la série précédente et d'y remplacer $\tang^2 \frac{1}{2} B$ par $-\tang^2 \frac{1}{2} B$:

$$a = c + \sin 2c . \tang^2 \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} \sin 4c . \tang^4 \frac{1}{2} B + \dots.$$

Lagrange a donné d'ailleurs une formule plus générale pour le développement de certaines fonctions implicites de x, telles que $F(z)$, z étant relié à la variable x par l'équation

$$z = x + \alpha f(z),$$

dans laquelle α est une quantité assez petite pour que la série procédant suivant ses puissances successives ait une convergence marquée. Nous nous bornerons à donner cette formule, dont

l'emploi n'exige que des différentiations, et nous l'appliquerons plus tard :

$$F(z) = F(x) + \alpha F'(x) f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d[F'(x)(fx)^2]}{dx} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \frac{d^2[F'(x)(fx)^3]}{dx^2} + \dots$$

Enfin, les astronomes ont souvent recours à la simple substitution des séries qui expriment $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$ dans les expressions trigonométriques où figurent des petits angles. Il ne s'agit pas, dans ce cas, d'obtenir des séries complètes qui représenteraient analytiquement les fonctions proposées, mais simplement les termes les plus sensibles de ces séries, de manière à faciliter le calcul numérique. Nous en trouverons des exemples en Géodésie.

Terminons par une remarque essentielle pour la pratique. Dans ces séries et dans bien d'autres formules où l'on rencontre à la fois des arcs et des lignes trigonométriques, il ne faut pas oublier que les arcs sont censés exprimés en *parties du rayon*, et non en parties de la circonférence, c'est-à-dire en minutes ou en secondes. Si l'on veut les avoir en secondes, il faut opérer un changement d'unité tout semblable à ce que l'on fait pour écrire en toises une longueur exprimée en mètres. Dans ce dernier cas, on multiplie le nombre par le rapport du mètre à la toise. De même ici, il faudra multiplier la valeur de l'arc tirée de la formule par le rapport du rayon à la seconde, c'est-à-dire par 206 265. Par exemple, dans la série

$$c - a = -\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B \sin 2a + \dots,$$

$c - a$ est exprimé en parties du rayon; dans la formule

$$c - a = 206265'' \left[-\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B . \sin 2a + \dots \right],$$

ou

$$c - a = \frac{1}{\sin 1''} \left[-\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B . \sin 2a + \dots \right],$$

$c - a$ est exprimé en secondes.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES INSTRUMENTS DE MESURES ANGULAIRES. PRINCIPAUX ORGANES DE CES INSTRUMENTS.

La détermination des coordonnées locales, uranographiques ou zénithales, se réduit donc toujours à des mesures d'angles.

Les instruments destinés à ces mesures sont l'*équatorial*, dont nous avons déjà parlé à l'occasion des coordonnées polaires δ et H, ou le *théodolite*, destiné à la mesure des coordonnées z et A des astres ou des objets terrestres, et qui n'est qu'un équatorial redressé de manière que son axe, au lieu d'être dans la direction inclinée de l'axe du monde, soit placé dans celle de la verticale.

La grande supériorité du théodolite consiste en ce qu'on peut, à tout instant, retrouver la direction de son axe à l'aide du niveau et la corriger avec précision si cet axe venait à s'écarter de la verticale.

Avant de décrire ces instruments et les méthodes d'observation qui leur sont applicables, nous examinerons successivement divers organes qu'on rencontre dans tous les instruments de mesure angulaire, lesquels comportent toujours :

1° Une lunette faisant office d'alidade, mobile autour d'un axe et munie d'un index;

2° Un limbe gradué, dont le plan est perpendiculaire à cet axe, lequel doit passer par le centre du limbe;

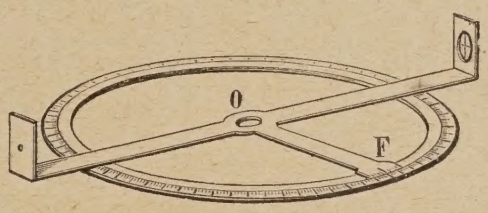
3° Un dispositif permettant de retrouver la direction de la verticale, qui est, comme nous l'avons dit, la principale direction de repère;

4° Un dispositif permettant de lire les appoints quand l'index tombe entre deux divisions du limbe.

Alidade à pinnules.

Pour mesurer l'angle compris entre les directions de deux objets A et B vus d'un point O, on place dans le plan AOB un cercle divisé en degrés et en minutes, au centre duquel tourne une règle ou *alidade* que l'on dirige successivement sur les deux objets, dans le sens où les divisions croissent sur le limbe. A cette alidade est fixée une seconde règle, en forme de rayon, OF, qui porte un trait de repère, ou, comme on le dit souvent, la *ligne de foi*. Les *pinnules* sont deux petites plaques assemblées perpendiculairement sur la première règle ; l'une d'elles porte un petit trou oculaire, l'autre une ouverture plus large au travers de laquelle on a tendu deux fils en croix. La ligne de visée est déterminée par le point de croisement de ces deux fils et le centre du trou oculaire derrière lequel l'œil se place. On voit ainsi une faible partie de l'espace,

Fig. 29.



limitée circulairement, et sur laquelle vient se projeter la croisée des fils du réticule. Lorsque l'alidade est dirigée sur l'objet A, cet objet apparaît couvert centralement par la croisée des fils. On lit alors sur le limbe la division qui répond à la ligne de foi, puis on fait tourner l'alidade de manière à la pointer sur l'objet B.

Si, dans les deux positions, on a lu sur le limbe les divisions u et u' marquées successivement par la ligne de foi, l'angle cherché a pour mesure $u' - u$.

Les conditions qu'un tel instrument doit remplir sont faciles à énumérer. La ligne de visée doit être parallèle au plan du limbe gradué; l'axe autour duquel tourne l'alidade doit être perpendiculaire à ce plan; le centre de rotation de l'alidade doit coïncider exactement avec le centre du limbe. La graduation doit être exacte; il faut être en état d'apprécier la petite quantité dont la ligne de foi aura dépassé le trait de la graduation le plus voisin;

enfin, il faut pouvoir imprimer, à la main, des mouvements doux très délicats à l'alidade, afin de l'amener à pointer exactement dans la direction voulue.

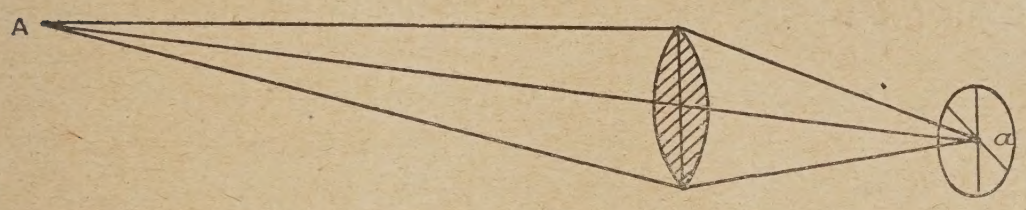
Substitution des lunettes aux pinnules.

L'alidade à pinnules est encore usitée dans l'arpentage et dans toutes les mesures qu'on effectue à l'œil nu. Elle ne peut donner qu'un pointé grossier, dont la précision ne dépasse pas $1'$ ou $2'$. Son inconvénient capital et irrémédiable consiste en ce que le pointé se fait par vision confuse, car l'œil ne saurait s'accommoder à la fois à trois points inégalement éloignés, à savoir les deux pinnules et l'objet. De plus, quand il s'agit des astres, l'observateur ne les voit jamais avec netteté; il lui faudrait pour cela un œil infiniment presbyte. Vers la fin du XVII^{e} siècle, les astronomes Picard et Auzout eurent l'idée de substituer une lunette aux pinnules de l'alidade sur leurs instruments de mesure. Ils remplacèrent la règle par le corps même de la lunette, la croisée des fils par une lentille biconvexe, et le petit trou oculaire par une ouverture circulaire un peu plus large où ils placèrent la croisée des fils. On se refusa d'abord à croire à la légitimité de cette substitution; les observateurs voyaient bien un des points de la ligne de visée, mais, dans la lentille objective, ils ne retrouvaient plus le second point, nécessaire cependant pour définir une direction. Il suffit de se reporter à la formation des images dans une lunette pour comprendre que ce second point n'est autre que le centre optique de la lunette objective.

En effet, tout faisceau de lumière émané d'un point éloigné et tombant sur la surface de l'objectif est transformé, par la réfraction qu'il subit en traversant cette lentille, en un autre faisceau conique de lumière convergent, dont le sommet n'est autre que l'image de ce point. Ces deux faisceaux ont même axe, et cet axe passe toujours et dans tous les cas par un certain point situé à l'intérieur de la lentille et qui en forme le *centre optique*. La ligne de visée qui, dans l'alidade à pinnules, était déterminée par le point de croisée des deux fils et le centre du trou oculaire, l'est, dans la lunette, par le centre optique de l'objectif et la croisée des

fils remplaçant le petit trou oculaire de l'alidade (1). Il suffit donc que l'image du point extérieur se forme dans le plan du réticule et coïncide avec la croisée des fils pour que l'axe optique soit dirigé sur ce point, avec la même exactitude géométrique que dans le cas des deux pinnules (*fig.* 29 *bis*).

Fig. 29 *bis:*



Pour opérer cette coïncidence, l'œil doit se placer en arrière du réticule, à la distance de la vision distincte, de manière à voir à la fois ce réticule et l'image du point visé, laquelle vient justement se former dans le plan du réticule. La vision est donc parfaitement nette. Si les objets visés successivement se trouvent à des distances très grandes par rapport à la longueur de la lunette (10 ou 20 000 fois plus grandes, par exemple), leurs images se formeront dans un seul et même plan focal principal de l'objectif, plan où le réticule pourra être fixé une fois pour toutes.

Afin de mieux voir la croisée des fils et l'image de l'objet, on se sert d'une petite loupe, nommée *oculaire*, et fixée au tube de la lunette de manière que chaque observateur puisse la faire glisser dans ce tube et la placer à la portée de sa vue. Alors il voit avec une netteté parfaite et avec un certain grossissement la croisée des fils et l'image de l'objet, et le pointé acquiert une exactitude tout à fait inconnue des anciens. Autrefois les observations se faisaient avec une erreur probable de $1'$ à $2'$; aujourd'hui l'erreur probable n'est guère que de $0''$, 1 à $0''$, 2 avec des lunettes de dimensions médiocres, comme celles des instruments portatifs.

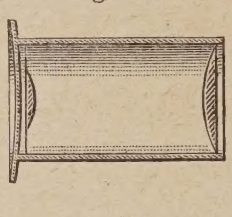
---

(1) Il faut bien se garder de confondre l'axe optique d'une lunette avec l'axe de figure du cylindre qui, d'ordinaire, forme le corps de la lunette, ou encore avec la droite joignant le centre de l'objectif au centre de l'oculaire. L'axe optique est *toujours* défini par la droite joignant le centre optique de l'objectif à la croisée des fils du réticule.

Lunettes astronomiques.

Les lunettes actuelles doivent être achromatiques; à cet effet, leur objectif se compose de deux lentilles, l'une biconvexe et extérieure, en verre commun (*crown glass*), l'autre biconcave ou plan-concave en cristal, c'est-à-dire en verre lourd à base de plomb (*flint glass*), placée en arrière de la première. L'oculaire

Fig. 30.



astronomique se compose de deux lentilles plan-convexes, disposées de manière à former une loupe, c'est-à-dire à donner, très près de la dernière lentille, une image réelle des objets éloignés. On le nomme *oculaire positif*, par opposition aux oculaires négatifs qui ne donnent que des images virtuelles, et dont on ne saurait tirer parti dans les lunettes destinées aux mesures.

Pour éprouver une lunette, on la dirige vers une étoile brillante. Le diamètre angulaire d'une étoile étant tout à fait inappréciable, celle-ci se comporte comme un simple point lumineux. L'image d'un tel objet ne saurait se réduire à un point, à cause des phénomènes de diffraction qui se produisent aux bords de l'objectif; elle a néanmoins un caractère géométrique très net, lequel devient sensible lorsque le ciel est pur. Elle apparaît, en effet, comme un très petit disque dont l'intensité décroît très rapidement sur les bords, et présente un peu plus loin une série très accentuée de minima et de maxima, c'est-à-dire une série d'anneaux alternativement obscurs et lumineux entourant le point brillant. Si l'objectif est de mauvaise qualité, ces anneaux sont déformés et l'image prend un aspect irrégulier. Pendant le jour, l'éclairement du fond du ciel, sur lequel l'étoile est aperçue au moyen d'une lunette, réduit l'image de l'étoile à la petite masse centrale de lumière. C'est sur ces astres que le pointé acquiert la précision dont nous avons parlé plus haut.

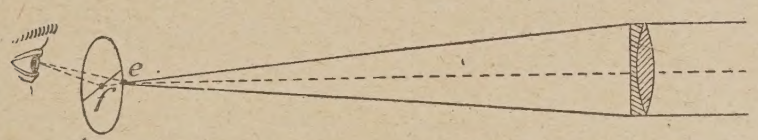
Mise au point. Réticule.

Pour se servir d'une lunette, il faut avant tout la bien *mettre au point*. Cette opération est double. En premier lieu, il faut que le réticule soit placé dans le plan focal où se forme l'image du point visé; en second lieu, l'oculaire doit être mis à la distance exacte du réticule où l'on voit d'une vision parfaitement nette les fils et l'objet.

Pour cela, on commence par mettre l'oculaire au point du réticule en l'enfonçant plus ou moins dans le tube porte-fils. Quand on voit nettement les fils, on fait glisser le tube porte-fils (avec l'oculaire, bien entendu) dans le tuyau de la lunette, de manière à bien voir l'image. Alors la croisée des fils et l'image sont dans le même plan.

Pour opérer cette indispensable rectification avec exactitude, il faut la soumettre à une petite épreuve, qui consiste à abaisser ou à élever l'œil autant que possible devant l'oculaire. Si l'étoile ne quitte pas le fil horizontal, la mise au point est parfaite. Si, au contraire, l'étoile s'élève au-dessus du fil quand l'œil s'élève, le réticule est un peu trop en avant : c'est ce qu'on nomme la *parallaxe des fils*. Pour la détruire, il faut enfoncer le tube du réticule dans la lunette; on devra le retirer un peu dans le cas contraire. C'est ce que montre la figure suivante.

Fig. 31.



Le réticule doit être ensuite fixé invariablement au tuyau de la lunette à l'aide de ses vis propres; on est certain alors que le pointé ne sera pas influencé par la situation que l'œil peut prendre devant l'oculaire.

C'est près de l'axe géométrique, sur lequel les lentilles de l'objectif ont été centrées par l'artiste, que les images sont les meilleures. Il convient donc que la croisée des fils soit située à très

peu près sur cet axe. Mais cette condition n'est nullement nécessaire ; on peut déplacer la croisée des fils dans son plan pour donner une position convenable à l'axe optique, c'est-à-dire à la ligne de visée. Le tube porte-fils a même deux vis opposées qui pressent sur la plaque circulaire du réticule et permettent de le mouvoir dans son propre plan, à la condition de tourner ces deux vis en sens opposés. On a besoin de recourir à cette manœuvre quand on veut rendre l'axe optique ou la ligne de visée exactement perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette.

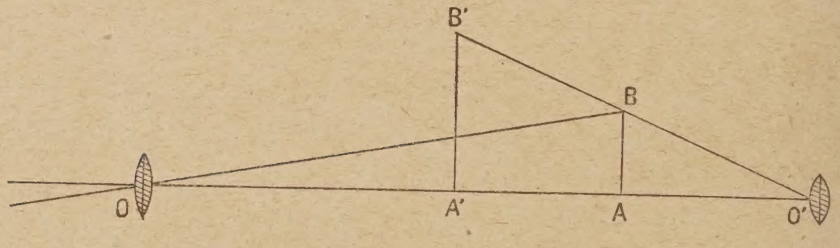
Rappel de quelques notions de la théorie des lentilles.

Bien que, pour la théorie des lentilles et des lunettes, nous renvoyons aux Traités de Physique, il est cependant utile de rappeler brièvement quelques notions qui doivent être toujours présentes à l'esprit.

Grossissement. — Le *grossissement*, dans la lunette, est le rapport des diamètres apparents de l'image et de l'objet, ou le rapport des tangentes des angles sous-tendus par l'objet vu dans la lunette ou vu directement à l'œil nu :

$$G = \frac{A'O'B'}{AOB} = \frac{AO'B}{AOB} = \frac{\dfrac{AB}{f}}{\dfrac{AB}{F}} = \frac{F}{f}.$$

Fig. 32.



Anneau oculaire. — L'anneau oculaire est l'image de l'objectif par rapport à l'oculaire jouant lui-même le rôle de l'objectif. Si a est le rayon de l'anneau oculaire et R le rayon de l'objectif, on a à très peu près $\frac{R}{a} = \frac{F+f}{f}$; ou encore, avec une approximation suffisante :

$$\frac{R}{a} = \frac{F}{f} = G.$$

On peut ainsi mesurer directement G au moyen d'un appareil spécial très simple, le *dynamètre* de Ramsden, qui consiste en une lame translucide divisée que l'on fait coïncider avec l'anneau oculaire et que l'on examine à l'aide d'une loupe.

Champ. — On appelle *champ*, dans la lunette, la portion de l'espace visible à travers l'oculaire. Sa limite extrême serait évidemment le cône dont le sommet est au centre optique de l'objectif et qui s'appuie sur l'oculaire. L'expérience ayant conduit les constructeurs d'instruments d'optique à prendre le rayon d'une lentille dans un certain rapport avec la distance focale, il s'ensuit que le champ total est sensiblement proportionnel à $\frac{F}{f}$, c'est-à-dire à l'inverse du grossissement. De là la nécessité d'adjoindre aux lunettes à fort grossissement une lunette appelée *chercheur*, de grossissement plus faible et de champ plus grand.

Il y a lieu de remarquer que la définition du champ total ne convient pas intégralement à nos instruments. Pour ceux-ci, le champ, non pas de la vision, mais de l'observation, est l'angle sous lequel on verrait, du centre optique de l'objectif, l'ouverture circulaire de la plaque du réticule. Le champ de vision est d'ordinaire bien plus restreint encore par le diaphragme intérieur de l'oculaire lui-même ; mais on peut mouvoir l'oculaire devant le réticule, de manière à parcourir entièrement le champ que nous venons de définir.

Clarté. — La *clarté*, dans une lunette, s'exprime par le rapport des quantités de lumière reçues par unité de surface de la rétine, suivant qu'on regarde l'objet lumineux à travers la lunette ou à l'œil nu. Supposons tout d'abord que l'objet ait un diamètre apparent sensible. R étant le rayon de l'objectif, la quantité de lumière qu'il reçoit est proportionnelle à R^2. Cette quantité de lumière entre entièrement dans l'œil, puisque, dans tous les instruments bien construits, le rayon de l'anneau oculaire est inférieur au rayon de la pupille.

Quand on regarde l'objet à l'œil nu, p étant le rayon de la pupille, la quantité de lumière qu'elle reçoit est proportionnelle à p^2.

Mais ces quantités de lumière sont réparties sur des images rétiniennes dont les surfaces sont entre elles dans un rapport exprimé par le grossissement superficiel G^2.

La clarté a donc pour expression

$$\frac{\frac{R^2}{G^2}}{p^2} = \frac{a^2}{p^2} \leq 1.$$

Supposons maintenant qu'on observe un simple point lumineux, — une étoile, par exemple, — n'ayant pas de diamètre apparent. La clarté aura évidemment pour expression

$$\frac{R^2}{p^2} > 1.$$

Ceci explique pourquoi l'on voit à la lunette des étoiles invisibles à l'œil nu. L'effet est d'autant plus grand que le fond du ciel, agissant comme un objet ayant un diamètre apparent, a sa clarté diminuée, ce qui fait ressortir encore l'éclat de l'étoile.

Pouvoir optique. — Enfin, l'image d'un point lumineux, d'une étoile par exemple, ne se présente pas sous la forme d'un simple point lumineux. En raison des phénomènes de diffraction, elle est formée, si l'objectif est circulaire, d'une tache centrale ronde, entourée d'anneaux concentriques alternativement clairs et obscurs et dont l'intensité diminue rapidement. Le rayon de la tache centrale est $\rho = \frac{F\lambda}{2R}$, λ désignant la longueur d'onde de la radiation lumineuse. On appelle *pouvoir optique* ou *pouvoir séparateur* d'une lunette, la distance angulaire minima de deux points que la lunette permet de séparer. Cette distance angulaire minima correspond évidemment au cas où les taches centrales formées respectivement par deux objets lumineux voisins sont tangentes extérieurement l'une à l'autre. α désignant la distance angulaire de leurs centres, on a

$$F\alpha = \frac{F\lambda}{2R}$$

et le pouvoir optique de la lunette sera

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2R}.$$

Ainsi, une lunette de 12^{cm} d'ouverture a un pouvoir séparateur d'environ $1''$. Le pouvoir séparateur de l'œil, la pupille ayant un diamètre de 2^{mm} est à peu près égal à $1'$.

Disons, en terminant, que la notion ordinaire du centre optique de l'objectif suppose que l'épaisseur de l'objectif est négligeable par rapport à sa longueur focale. Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans la réalité, cette notion doit être modifiée. A la place d'un centre optique unique par lequel passeraient les axes des pinceaux de lumière incidents et réfractés, il y a, pour chaque objectif, deux *points principaux* I et E, placés sur la ligne des centres des surfaces sphériques de l'objectif. La ligne de visée est déterminée intérieurement par le point principal intérieur I et la croisée des fils, extérieurement par le point principal extérieur E et l'objet. Ces deux droites ne coïncident pas en toute rigueur, mais sont parallèles.

Verniers.

Les verniers appliqués aux cercles gradués sont fondés sur les mêmes principes que les verniers appliqués aux règles divisées.

Dans la plupart des cercles, les divisions sont de 10 minutes en 10 minutes quand ils sont divisés en degrés, ce qui fait 2160 divisions sur le limbe entier; cela en fait 4000 quand le cercle est divisé en 400 grades dans la division centésimale. Or le diamètre des cercles des instruments géodésiques varie de $0^m,30$ à $0^m,60$; on ne saurait donc multiplier davantage les divisions sans confusion. A la vue simple, on ne peut guère apprécier que le dixième d'une division et juger, par conséquent, de la position de l'alidade qu'à $1'$ près tout au plus. Avec le vernier, on pousse la précision jusqu'aux 10 et même aux 5 secondes.

Supposons un cercle divisé en degrés sexagésimaux de $10'$ en $10'$. Pour que le vernier donne les $10''$ tandis que les divisions en valent 600, il faut apprécier $\frac{1}{60}$ d'une division. Pour cela, l'artiste qui a construit l'instrument a donné au vernier une longueur de 59 divisions du limbe et l'a divisé en 60 parties égales. La différence de deux divisions du limbe et du vernier est donc bien de $10''$. Il en résulte que, si le zéro du vernier (la ligne de foi) coïncide avec le trait 90° du limbe, par exemple, le trait suivant du vernier sera en retard de $10''$ sur la division $90^\circ\ 10'$ du limbe. Pour placer le vernier à $90^\circ\ 0'\ 10''$, il suffira de le faire avancer un peu jusqu'à ce que la coïncidence ait lieu, non pour le premier trait du vernier, mais pour le second. De même, pour que la lecture du vernier soit de $90^\circ\ 0'\ 20''$, il faudra mettre le troisième trait du vernier en

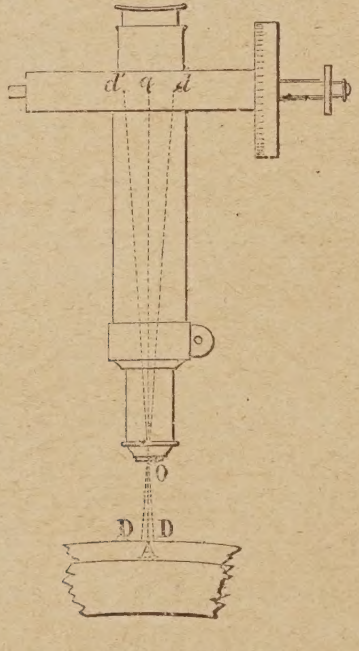
coïncidence avec le trait voisin du limbe. De là le système de numérotage des divisions du vernier. Les 60 traits de division sont d'inégales longueurs : les plus longues, de 6 en 6, sont numérotées en minutes; les divisions intermédiaires donnent les dizaines de secondes. Pour lire le vernier, il faut donc : 1° noter la division du limbe qui précède immédiatement le zéro du vernier, ce qui donne les degrés et les dizaines de minutes; 2° chercher à la loupe le trait du vernier qui se trouve en coïncidence avec un trait du limbe et lire, sur la graduation du vernier, les minutes et dizaines de secondes correspondant à ce trait. Avec un peu d'attention, on parvient même à estimer très bien les 5″.

L'emploi du vernier est fondé sur la grande exactitude avec laquelle l'œil juge de la coïncidence de direction de deux traits de même force situés, sur le même plan, dans le prolongement l'un de l'autre. Il est nécessaire d'employer une loupe et surtout d'éclairer uniformément le limbe et le vernier.

Microscope à micromètre.

Dans les instruments où les évaluations d'appoint doivent se faire avec grande précision, on emploie, au lieu de verniers, des

Fig. 32 *bis*.



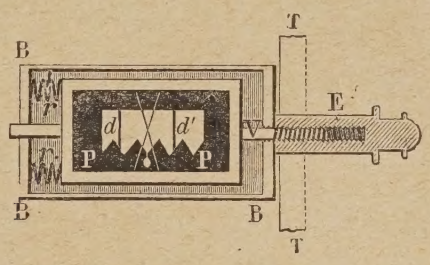
microscopes, solidement fixés à l'instrument, soit au bâti fixe, soit au bâti mobile, et dont les axes sont pointés sur les divisions.

Décrivons d'abord ces microscopes.

Supposons que l'axe optique AO*a* d'un de ces microscopes (*fig.* 32 *bis*) soit dirigé sur un point A du limbe et tombe entre deux traits, D et D′.

Les images de ces traits se forment dans le plan focal de l'objectif en *d* et *d′*. Il s'agit d'obtenir l'arc DA, qu'il faut ajouter à la lecture en D pour avoir la position du point A. Cet arc se mesure en *ad*, à l'aide d'une croisée de fils, mobile, qui marche de *a* en *d* sous l'action d'une vis micrométrique armée de son tambour divisé en 60 parties égales d'environ 1″ chacune. Voici la légende de la figure 32 *ter* qui représente le réticule mobile du microscope :

Fig. 32 *ter*.



BBB, boîte rectangulaire fixée au corps du microscope ;
CCC, châssis mobile portant la croisée des fils ;
V, vis micrométrique fixée au châssis et engagée dans l'écrou extérieur E ;
E, écrou qu'on tourne à la main pour faire mouvoir le châssis ;
r, *r*, ressorts tendant à écarter le châssis du fond de la boîte afin d'éviter le temps perdu de la vis ;
TT, tambour divisé, faisant corps avec l'écrou et destiné à subdiviser un tour de la vis en 60 parties égales ;
PP, peigne visible dans le champ du microscope et servant à compter, par des crans, les tours de vis à partir du zéro ou de l'axe optique *a*A (*fig.* 32 *bis*) du microscope ;
dd′, image des traits DD′ du limbe.

Du zéro ou de *a* en D, il y a plus de deux crans, par suite deux tours et une fraction à imprimer à l'écrou pour amener la croisée des fils sur le trait D. Lorsque ce pointé est fait, on note le nombre de tours et on lit la fraction de tour sur le tambour.

Si l'intervalle de deux traits consécutifs DD′ du limbe est de 5′,

en division sexagésimale, on règle le microscope de manière que l'intervalle *dd'* des images de deux traits comprenne cinq crans du peigne. Alors le tour de vis vaut 1′, et une partie du tambour vaut 1″, puisque le tambour est supposé divisé en 60 parties. Dans un cercle divisé en grades, l'intervalle de deux traits consécutifs du limbe est d'ordinaire de 10′, le tambour est divisé en 100 parties, et le microscope réglé de façon que l'intervalle *dd'* des images de deux traits comprenne deux crans et demi de peigne ou deux tours et demi du tambour. Chaque division du tambour vaut alors 4 secondes. On estime dans les deux cas, très aisément, le dixième d'une division du tambour.

Vis de rappel. Vis micrométrique.

Sur un cercle de 0^m, 15 de rayon, les 10″ ont une longueur de $10\,\frac{0^m,15}{206265} = \frac{3}{400}$ de millimètre, et cette longueur ne serait plus que de $\frac{15}{4000}$ de millimètre, en division centésimale. Il serait impossible de faire tourner un pareil cercle à la main d'une si petite quantité. Notre main n'est capable que de mouvements relativement grossiers et de grande amplitude. On y remédie en prenant pour intermédiaire une vis à filets fins, et à pas très petit (de quelques dixièmes de millimètre seulement). Alors, pour produire dans l'alidade, et par suite dans la lunette, un déplacement de $\frac{1}{400}$ de millimètre, on aura à faire tourner la vis d'une portion notable de la circonférence. On arrive ainsi à pointer la lunette, avec une précision comparable à celle de la vision, par quelques tâtonnements, en faisant tourner la vis de rappel tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Mais il est essentiel au succès de cette manœuvre que la vis n'ait pas de *temps perdu* en tournant dans son écrou. S'il s'agit de pousser un obstacle avec une vis agissant sur son écrou fixé audit obstacle, les filets de la vis portent sur ceux de l'écrou par une seule de leurs deux faces, celle qui est à la main. Si l'on tourne la vis en sens contraire pour tirer à soi l'obstacle, les filets de la vis ne commencent à agir que lorsqu'ils s'engagent avec ceux de l'écrou par leur face opposée. Si peu qu'il y ait de jeu, et un peu de jeu est nécessaire au mouvement, on tourne à vide la vis entre ces deux moments sans produire aucun effet,

alors qu'on croit en avoir produit un. On supprime le temps perdu au moyen d'un ressort antagoniste qui force la vis à agir toujours par la même face des filets, ou en coupant l'écrou en deux et en maintenant ses deux moitiés contre la vis par la pression d'un ressort. On commence donc par faire tourner l'instrument à la main pour amener la lunette vers l'objet; pour achever le pointé avec la précision requise, on fixe l'alidade au limbe par une mâchoire, et l'on achève l'opération avec la vis qui a son point d'appui sur le limbe et dont l'écrou est porté par cette mâchoire.

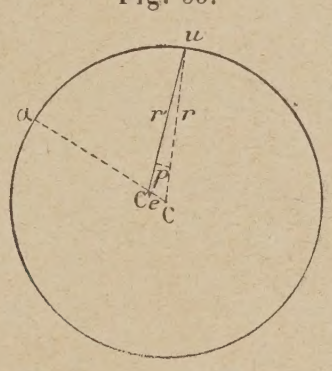
Erreurs d'excentricité; leur élimination au moyen de verniers opposés.

Nous avons vu qu'une des conditions théoriques que doivent remplir les organes des instruments de mesure d'angles est que l'axe de rotation de l'alidade passe exactement par le centre du limbe.

Si cette condition théorique n'est pas remplie, il y a une erreur d'excentricité dont nous allons voir les effets et montrer la possibilité de l'éliminer.

1° Le pivot de l'alidade peut n'être pas rigoureusement centré sur le cercle limbe. Soient (*fig.* 33) C le centre du limbe, C′ celui

Fig. 33.



de l'alidade, α la division à laquelle aboutirait une droite qui joindrait ces deux centres, C′u la direction actuelle de la ligne de foi du cercle alidade lorsque la lunette est pointée sur un objet; u, c'est-à-dire la division du limbe à laquelle s'est arrêtée la ligne de foi, correspond à une direction Cu, laquelle diffère de la direction Cu', que l'on aurait observée s'il n'y avait pas d'erreur

d'excentricité, d'un très petit angle $C'uC$ que nous désignons par p, en supposant le point suffisamment éloigné pour que l'on puisse considérer $C'u$ et Cu' comme parallèles.

Posons $CC = e$, $Cu = r$, $C'u = r'$; l'angle en C' sera $u - \alpha$, et nous aurons :

$$r' \sin p = e \sin(u - \alpha),$$
$$r' \cos p = r - e \cos(u - \alpha).$$

Multiplions les deux équations respectivement par $\cos \frac{u-\alpha}{2}$ et $\sin \frac{u-\alpha}{2}$ et ajoutant, nous aurons :

$$r' \sin\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = r\left[1 + \frac{e}{r}\right] \sin \frac{u-\alpha}{2};$$

de même, en multipliant respectivement par $\sin \frac{u-\alpha}{2}$ et $\cos \frac{u-\alpha}{2}$ et retranchant, nous aurons :

$$r' \cos\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = r\left[1 - \frac{e}{r}\right] \cos \frac{u-\alpha}{2};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\left(p + \frac{u-\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \operatorname{tang} \frac{u-\alpha}{2},$$

et enfin

$$p = \frac{e}{r} \sin(u - \alpha) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{r^2} \sin 2(u - \alpha) + \frac{1}{3} \frac{e^3}{r^3} \sin 3(u - \alpha) + \ldots.$$

Le premier terme suffit d'ordinaire; p étant calculé, on l'ajoutera à la lecture u du limbe pour avoir la vraie direction de la lunette.

Il serait d'ailleurs aisé de déterminer une fois pour toutes les constantes de cette formule, mais nous allons voir par quel artifice on parvient à éliminer cette erreur.

2° Dans tout instrument de mesure, il y a une autre sorte d'excentricité, non plus fixe, mais *fluctuante* : c'est celle qui provient du jeu de l'axe de rotation dans sa douille, jeu nécessaire puisque, s'il n'existait pas, le mouvement serait impossible. La formule précédente devant être écrite, pour avoir p en secondes :

$$p = 206\,265'' \frac{e}{r} \sin(u - \alpha)$$

ou

$$p = \frac{e}{r \sin 1''} \sin(u - \alpha),$$

on voit qu'un jeu de $\frac{1}{10\,000}$ de r, c'est-à-dire de $\frac{15}{1000}$ de millimètre seulement, donnerait à p une valeur de 20 secondes sexagésimales, ou de 59 secondes centésimales.

Heureusement on a trouvé, dans l'emploi de deux verniers opposés, le moyen d'éliminer toute excentricité de quelque cause qu'elle provienne. Soient u et u' les lectures de ces deux verniers lorsque la lunette est pointée dans la direction Cu. Pour corriger les lectures u et u', il faudrait leur ajouter les petits angles correspondants p et p'; on aurait ainsi, pour le premier vernier,

$$u + \frac{e}{r} \sin(u - \alpha);$$

pour le deuxième,

$$u' + \frac{e}{r} \sin(u' - \alpha).$$

Or, u' est à peu près égal à $180^\circ + u$, puisque les deux verniers sont opposés; les deux termes correctifs sont donc sensiblement égaux et de signes contraires; ils se détruisent quand on fait la somme des lectures corrigées. La moyenne des deux verniers, c'est-à-dire $\frac{u' + u}{2}$, se trouve donc exempte de toute erreur d'excentricité.

Il en serait de même de la moyenne des lectures faites à n verniers équidistants.

Erreurs de division.

Si, au moment de graduer le limbe, l'artiste ne l'a pas centré rigoureusement sur la plate-forme de sa machine à diviser, il en résultera, dans la division tracée par la machine, une erreur de la forme

$$\frac{e}{r} \sin(u - \alpha) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{r^2} \sin 2(u - \alpha) + \frac{1}{3} \frac{e^3}{r^3} \sin 3(u - \alpha) + \dots.$$

S'il a laissé subsister une petite inclinaison B du cercle limbe sur sa plate-forme, il en résultera, dans les divisions obtenues, une

erreur de la forme

$$-\operatorname{tang}^2\frac{B}{2}\sin 2(u-\beta)+\frac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{B}{2}\sin 4(u-\beta)-\ldots.$$

De même, toutes les erreurs d'origine quelconque pourront être représentées en bloc par une série de la forme

$$a\sin(u+A)+b\sin 2(u+B)+c\sin 3(u+C)+\ldots.$$

C'est la série de Fourier. Quand la division est bien faite, ces termes vont en diminuant assez rapidement et deviennent insensibles au delà d'un certain degré de multiplicité de l'arc u.

Dans les grands instruments astronomiques, les astronomes s'astreignent à déterminer l'erreur de chaque trait de division de leurs cercles. L'instrument étant placé horizontalement, on mesure, comme d'ordinaire, entre deux objets convenablement choisis, un angle très peu différent d'un sous-multiple de la circonférence, de 10°, par exemple, en commençant par la division o. Puis on recommence cette mesure en partant du point du limbe auquel on est arrivé dans la première opération. En continuant ce travail jusqu'à ce qu'on retombe à peu près sur le point de départ, c'est-à-dire près de 0°, on trouve $0^\circ+\varepsilon$, ε étant un petit arc obtenu à l'aide du vernier et l'on a, pour la valeur de l'angle, $\frac{360^\circ+\varepsilon}{36}$. Or, cette valeur est indépendante des erreurs de division, puisqu'on n'a employé qu'un seul trait, celui de 0°. En comparant cet angle parfaitement exact avec les mesures individuelles obtenues en diverses régions du limbe, on a les erreurs des traits de 10° en 10°. On opérerait de même pour avoir les erreurs des traits de 3° en 3°, etc.

Les géodésiens éliminent les erreurs de division à l'aide d'un agencement particulier de leurs mesures et de leurs instruments.

Cette élimination est fondée sur ce théorème :

La moyenne des lectures faites à n verniers équidistants est exempte de tous les termes de la série des erreurs dont le degré de multiplicité n'est pas divisible par n.

En effet, la lecture du premier vernier étant u, celle du deuxième, u_1, sera à peu près égale à $u+\frac{360^\circ}{n}$; celle du troisième, u_2, sera

à très peu près $u + 2\frac{360^\circ}{n}$, etc. Si nous désignons le terme général de la série de Fourier par

$$x \sin k(u + X),$$

k étant un nomber entier, les lectures corrigées de ce terme seront :

Premier vernier... $u + x \sin k(u + X)$,

Deuxième » ... $u_1 + x \sin k\left(u + \frac{360^\circ}{n} + X\right)$,

Troisième » ... $u_2 + x \sin k\left(u + 2\frac{360^\circ}{n} + X\right)$,

.....,

$n^{\text{ième}}$ vernier..... $u_{n-1} + x \sin k\left[u + (n-1)\frac{360^\circ}{n} + X\right]$.

Or, la somme des sinus d'arcs croissant, comme ceux-ci, en progression arithmétique, est nulle quand, après le dernier, on retombe sur le point de départ. La moyenne des verniers équidistants

$$\frac{u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{n}$$

est donc exempte de l'erreur représentée par ce terme général.

Il faut excepter le cas où k serait divisible par n, car alors la raison de la progression $k\frac{360^\circ}{n}$ serait d'un nombre entier de circonférences, ce qui ramènerait tous les termes correctifs ci-dessus à la valeur du premier, $x \sin k(u + X)$. La moyenne des n verniers serait donc elle-même affectée de ce terme, tout comme si l'on n'avait lu qu'un seul vernier.

Les théodolites ont au moins deux verniers opposés, en sorte que les termes d'ordre impair de la série de Fourier disparaissent. Les cercles azimutaux du Service géographique de l'Armée ont quatre verniers équidistants; ils annulent les trois premiers termes de la série et ne laissent subsister que les termes $d \sin 4(u + D)$, $h \sin 8(u + H)$, ... Les grands cercles méridiens des astronomes ont six verniers.

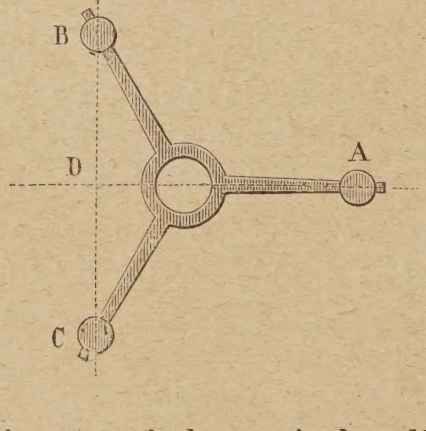
CHAPITRE IV.

DESCRIPTION ET USAGE DU THÉODOLITE.

Le théodolite est destiné à mesurer les coordonnées zénithales, le z et l'A d'un astre ou d'un point terrestre quelconque visible sur l'horizon de l'observateur. Son axe principal doit être placé verticalement. La lunette est portée par un axe secondaire perpendiculaire au premier et, par conséquent, horizontal. La lunette tourne autour de cet axe sur un limbe vertical. Le plan vertical que la ligne de visée décrit ainsi peut prendre toutes les positions autour de l'axe principal de l'instrument. Les angles dièdres que forme ce plan mobile avec un plan vertical pris pour origine sont les azimuts, et se lisent sur la graduation d'un cercle horizontal fixé au pied du théodolite.

C'est au fond un équatorial, redressé verticalement; le mérite de cet instrument et du système de coordonnées sphériques qu'il permet de mesurer tient à ce qu'il est très facile de déterminer, à

Fig. 34.



chaque instant, la direction de la verticale à l'aide d'un niveau et de donner cette direction à l'axe.

A cet effet, l'instrument repose sur trois pieds armés de vis à filets serrés et à larges têtes (*fig.* 34). C'est en agissant sur ces vis qu'on parvient très rapidement à amener l'axe du théodolite dans la direction de la verticale. Soient A, B, C ces trois vis formant un triangle équilatéral, et jouant sur trois petites pièces de cuivre scellées dans le pilier en pierre de taille qu'il faut donner pour support à l'instrument.

Considérez dans ce triangle l'un des côtés BC et la droite AD perpendiculaire à BC. En agissant sur la vis A, on fera tourner l'instrument autour de la droite BC; en agissant des deux mains, mais en sens contraire, sur les vis B et C, on fera tourner l'instrument autour de la droite AD. Par le premier mouvement, on rendra l'axe parallèle au plan vertical passant par BC; au moyen du second, on le rendra parallèle au plan vertical passant par AD. On l'amènera ainsi dans la direction de l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire dans la direction de la verticale.

L'opération se fait d'abord par à peu près, de sentiment; on l'achève, comme nous le verrons tout à l'heure, en se guidant sur un niveau.

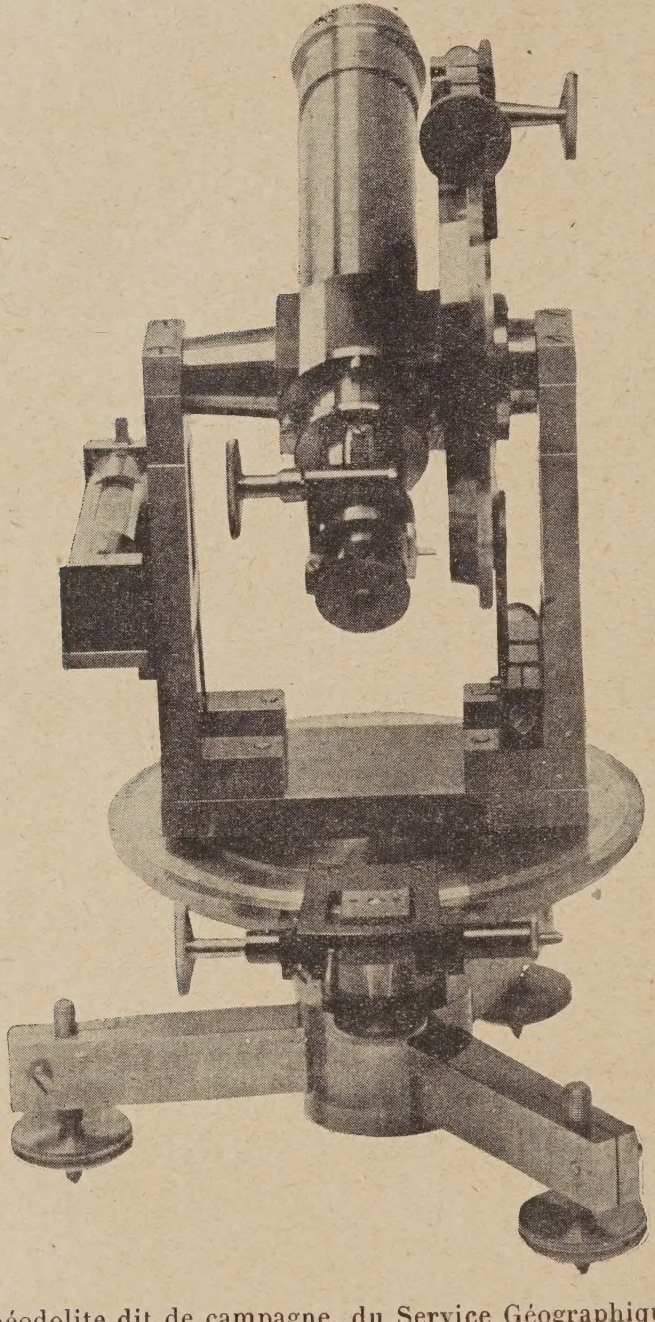
Cette espèce de trépied ABC supporte une colonne creuse, une douille, dont l'intérieur est légèrement conique et dans laquelle tourne l'*axe principal*. Le dessin ci-joint (*fig.* 35) représente une coupe du théodolite. Son axe est légèrement conique comme la douille elle-même. Pour diminuer le frottement, il repose, par sa pointe inférieure, sur un très fort ressort d'acier fixé au trépied, ressort dont l'élasticité fait équilibre à la presque totalité du poids de l'instrument. La douille fixe porte le cercle divisé horizontal; l'axe porte un cercle concentrique au premier, sur lequel sont tracés deux verniers opposés. Là se mesurent les *azimuts*.

L'axe supporte à sa partie supérieure une traverse horizontale sur laquelle repose l'axe secondaire, celui de la lunette. Celle-ci se meut sur un limbe gradué, fixé verticalement à la traverse. Il y a là encore à distinguer le limbe gradué fixe, et un cercle intérieur portant une ligne de foi et des verniers opposés. Là se mesurent les *distances zénithales*. Un contrepoids placé au bout opposé de la traverse équilibre la lunette et son cercle alidade, de sorte que le centre de gravité de tout l'appareil soit dans l'axe vertical.

Le théodolite que nous venons de décrire est à lunette excentrée.

Nous verrons plus loin comment, dans la détermination des différences d'azimuts d'objets rapprochés, on élimine l'effet de cette excentricité. Dans d'autres modèles, la lunette du théodolite est, au contraire, centrée sur l'axe principal (*fig.* 34 *bis*).

Fig. 34 *bis*.



Théodolite dit de campagne, du Service Géographique de l'Armée.

Quel que soit le modèle de l'instrument, les conditions géométriques qu'il doit remplir sont au nombre de trois :

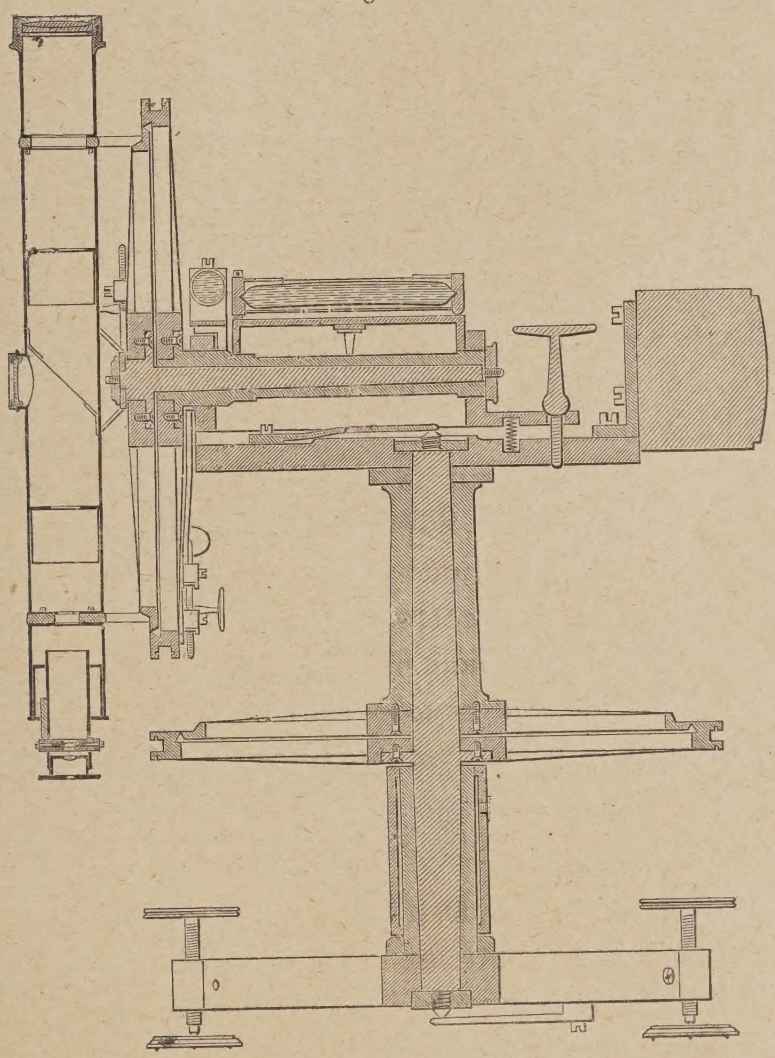
1° L'axe principal doit être vertical;

2° L'axe secondaire qui porte la lunette doit être perpendiculaire au premier, ce qui revient à dire qu'il doit être horizontal quand le premier est vertical;

3° La ligne de visée, ou axe optique de la lunette, doit être perpendiculaire à son axe de rotation.

Il faut, en outre, que le plan du limbe horizontal soit perpendi-

Fig. 35.



culaire à l'axe principal, condition toujours suffisamment réalisée par le constructeur, et enfin que l'axe principal passe par le centre du limbe horizontal, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'erreur d'excentricité. Nous avons vu précédemment comment on corrige l'influence de cette erreur, qui subsiste toujours, en raison même du jeu que l'on est forcé de donner à l'alidade.

Comme tout instrument est susceptible de se déranger par l'effet de causes diverses, principalement par les moindres variations de température, il faut que l'on puisse à chaque instant opérer les trois rectifications nécessaires à la réalisation des trois conditions géométriques ou déterminer les trois très petites erreurs qu'une rectification incomplète aura laissé subsister. Nous allons donc les passer en revue.

Rectification de la ligne de visée.

Elle doit être perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette. Visons avec la lunette, à l'horizon, un signal assez éloigné pour que l'excentricité de la lunette soit vue, de ce signal, sous un angle négligeable, et soit u la division du limbe horizontal qui répond au vertical de ce signal, ou pour mieux dire à la ligne de foi du cercle alidade. Après avoir lu cette division (aux deux verniers), faisons tourner l'instrument de 180° ou 200^g. La lunette se trouvera à gauche de l'axe si, dans la première observation, elle se trouvait à droite. Pour la ramener sur le signal, il faudra la faire tourner autour de son axe propre. Supposons qu'après avoir effectué ce second pointé, on lise de nouveau la division correspondante du limbe azimutal, et soit u' cette lecture.

Si la ligne de visée est bien perpendiculaire à l'axe horizontal de la lunette, on aura $u' = u + 180^\circ$ ou $u + 200^g$. Dans le cas contraire, α étant le petit défaut de position de la ligne de visée, on aura :

$$u' - u = 180^\circ \pm 2\alpha = 200^g \pm 2\alpha$$

et, pour corriger cette erreur, il faudra : 1° amener la ligne de foi du cercle alidade horizontal sur la division $u' \mp \alpha$; 2° déplacer le réticule de la lunette à l'aide de ses vis propres jusqu'à ce que la croisée des fils couvre le signal (1).

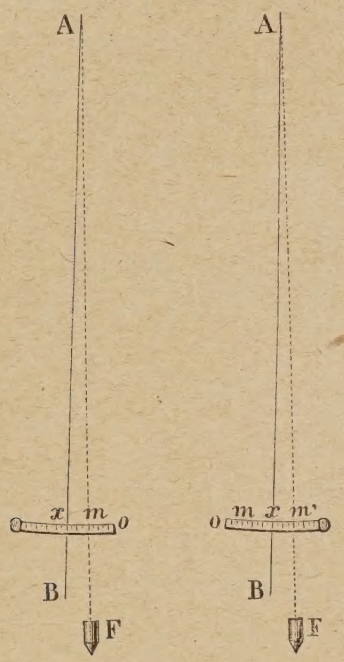
---

(1) Si le signal n'était pas assez éloigné, soient D sa distance, r la distance de la lunette à l'axe principal et β un petit angle donné par $\frac{r}{D} = \sin\beta$; l'opération précédente fournirait la relation $u' - u = 180^\circ$ (ou 200^g) $- 2\beta + 2\alpha$, et fera connaître l'erreur α de l'axe optique.

Rectification de l'axe principal. Fil à plomb. Niveaux

Soient (*fig.* 36) AB un axe quelconque tournant autour de deux points fixes A et B, AF un fil à plomb fixé en A, *om* un petit arc gradué plaqué à cet axe et amené par rotation dans le plan vertical FAB. Désignons par *o* l'origine de la graduation, par *x* la division qui répond à l'axe AB et par *m* celle sur laquelle vient battre le fil à plomb. L'arc *xm* donnera l'inclinaison *i* de l'axe. Mais *x* est inconnu. Pour l'éliminer, il faut opérer par retournement. Faisons tourner l'appareil de 180° autour de AB. Le point *o* et la

Fig. 36.



division *m* passeront, de la droite à la gauche, dans la position symétrique marquée sur la deuxième figure. Le fil à plomb viendra battre l'arc de cercle sur une nouvelle division *m'*, évidemment symétrique à la première par rapport à AB. Donc

$$i = \frac{m' - m}{2}, \qquad x = \frac{m' + m}{2}.$$

Si l'on juge à propos de corriger l'inclinaison, il faudra agir sur les vis du pied de manière à amener la division *x*, désormais connue, sous le fil à plomb.

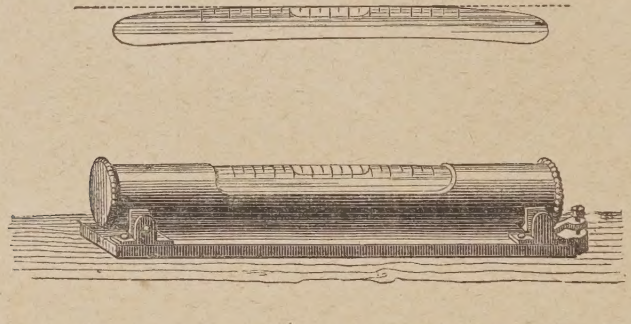
Nous n'avons parlé du fil à plomb que pour bien faire saisir le

problème. On ne l'utilise jamais quand il s'agit d'instruments aussi précis que ceux dont on se sert en astronomie et en géodésie. C'est le niveau à bulle d'air que l'on emploie exclusivement pour la détermination de la verticale et la rectification des axes.

Niveau à bulle d'air.

Prenons un tube cylindrique en verre (*fig.* 37), fermé aux deux bouts, très légèrement courbé en arc de cercle et rempli d'un liquide très mobile (l'éther), sauf une petite bulle allongée qui va se loger à la partie supérieure du tube, par la même raison que le

Fig. 37.



plomb du fil précédent va se placer au point le plus bas par rapport au point d'attache.

Ce tube, enfermé dans une monture en cuivre, est fixé à l'axe du théodolite. Sa surface supérieure est graduée en divisions égales. Si on lit les divisions b, b' qui répondent aux deux bouts de la bulle, la division $\frac{b+b'}{2}$ sera le point culminant du tube, et le rayon idéal qui joint le milieu A de l'arc bb' au centre sera vertical. Ce rayon va jouer le rôle du fil à plomb.

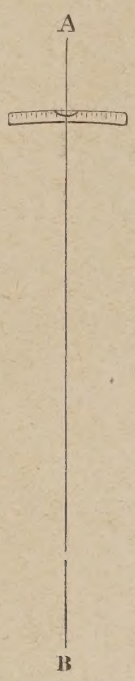
Pour mesurer l'inclinaison de l'axe, estimée dans un plan vertical quelconque, amenez le niveau dans ce plan en faisant tourner l'instrument et notez la division $n = \frac{b+b'}{2}$ qui répond au milieu de la bulle. Ensuite, faites tourner l'instrument de 180°, de manière à ramener le niveau dans le même plan, mais renversé bout pour bout. Soit n' la moyenne des lectures faites aux deux extrémités de la bulle. On aura, comme par le fil à plomb,

$$i = \frac{n'-n}{2}, \qquad x = \frac{n'+n}{2},$$

x étant la division où il faut amener le milieu de la bulle pour rendre l'axe vertical dans le plan du retournement. Si $\frac{n' - n}{2}$ est positif, l'axe penche de cette quantité du côté où se trouve le zéro de la graduation du niveau au moment de la seconde lecture, c'est-à-dire après le retournement.

L'avantage du niveau sur le fil à plomb, en outre de la précision

Fig. 38.



incomparablement plus grande, consiste en ce qu'on n'a pas besoin de s'occuper du centre et, par conséquent, du rayon de l'arc du niveau; on peut donc donner au tube du niveau une courbure telle que le rayon soit de 200^{m} ou même de 400^{m}. Dans le premier cas, l'arc de $1''$ a pour longueur, sur le tube :

$$\frac{200\,000^{mm}}{206\,265} = 1^{mm} \text{ à peu près,}$$

en division sexagésimale, et :

$$\frac{200\,000^{mm}}{400\,000} = 0^{mm},5$$

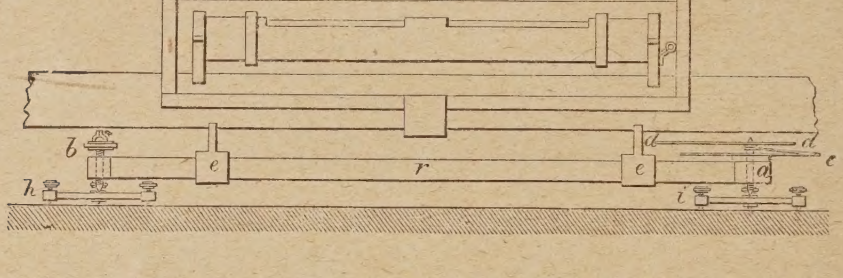
en division centésimale.

Dans le second cas, cet arc aurait 2^{mm} environ ou 1^{mm}, de sorte

que les dixièmes de seconde dans la première hypothèse et les deux dixièmes dans l'autre peuvent être évalués avec suffisamment de précision (1).

Lorsque les niveaux ont une pareille sensibilité, les mouvements de la bulle sont très lents : pour en lire les extrémités sur la graduation du tube, il faut attendre patiemment que la bulle soit arrivée à sa position d'équilibre. D'autre part, la moindre variation de température dans l'appareil fait marcher la bulle et peut en vicier les indications. On lit donc, dans le cas des grands niveaux, comme ceux dont on se sert dans les observatoires, les divisions de loin, au besoin avec une petite lunette, afin d'éviter l'échauffement irrégulier dû au voisinage de l'observateur. Ces instruments délicats doivent être traités avec soin.

Fig. 39.



Pour déterminer la valeur angulaire des divisions, on place le niveau sur un appareil spécial (*fig.* 39), consistant en une longue

---

(1) On ne trouverait guère de tubes de verre qui aient naturellement une pareille courbure sur une étendue suffisante; il faut en tailler l'intérieur. Pour cela, on engage dans le tube un mandrin d'acier garni d'émeri et porté par un tour à l'une de ses extrémités. Le mandrin tournant rapidement autour de son axe, on presse légèrement sur lui la partie supérieure du tube en donnant à celui-ci un mouvement de va-et-vient longitudinal. Le verre et l'acier s'usent mutuellement, jusqu'à ce que le contact se produise dans toute l'étendue du tube, ce qui ne peut avoir lieu que si le tube et le mandrin ont pris la forme d'un arc de cercle à grand rayon, ou plutôt celle d'une surface engendrée par la révolution d'un tel arc autour de l'axe.

La sensibilité d'un niveau est contrariée par la capillarité. Près des parois du tube, la surface libre du liquide se recourbe fortement sous forme de ménisque. Si la bulle est réduite à un simple globule, elle serait retenue n'importe où par la capillarité. Pour vaincre cet obstacle, il faut donner une grande longueur à la bulle et au tube; les mouvements sont alors très lents et ne restent bien réguliers que si l'on évite tout échauffement extérieur.

règle posée sur un support, d'un côté par un couteau, de l'autre par une vis micrométrique analogue à celle des sphéromètres. Lorsque la bulle est au repos, on enregistre la position de la bulle; puis, en soulevant peu à peu l'extrémité de la règle à l'aide de la vis, on fait parcourir à la bulle un certain nombre m de divisions. La variation h de la hauteur de la règle est donnée par la vis; si l en est la longueur, on a

$$\frac{h}{l} = \text{tang}\, i \qquad \text{et} \qquad i = n \text{ divisions},$$

ce qui fait connaître la valeur d'une division en secondes. On examine ensuite si la courbure du niveau est bien régulière, c'est-à-dire si la valeur angulaire des divisions est bien la même dans toute l'étendue de la graduation. Nous supposerons dorénavant que cette conversion des parties du niveau en secondes a toujours été opérée.

Dans beaucoup d'instruments, le niveau a le zéro au milieu du tube et non à l'un des bouts, comme nous l'avons tacitement supposé plus haut; alors il faut convenir de compter les divisions positivement vers un bout de l'appareil et négativement vers l'autre. Cette disposition a l'avantage de montrer, du premier coup d'œil, si l'axe du théodolite est bien vertical, car alors le milieu de la bulle doit être au zéro, autrement dit $b = -b'$. Mais, en ce cas, le niveau doit être bien réglé lui-même et être muni d'une vis de rectification qui permette de déplacer un peu le tube par rapport à sa monture ou, si l'on veut, par rapport à l'axe qui le porte.

Dans tous les cas, la rectification de l'axe et celle du niveau lui-même peuvent s'opérer simultanément de la manière suivante. On fait varier l'inclinaison de l'axe avec ses vis propres, jusqu'à ce que le milieu de la bulle du niveau marque zéro, ou la division moyenne de la graduation. On opère le retournement à 180^0 ou 200^g. Si le milieu de la bulle reste à la même graduation, le niveau est bien réglé et l'axe est bien vertical; si la bulle s'écarte de sa position primitive, on l'y ramène moitié par la vis propre du niveau, moitié par celles du pied de l'instrument.

Rectification de l'axe secondaire.

L'axe principal étant bien vertical, l'axe secondaire qui lui est perpendiculaire doit être alors horizontal. On s'en assure à l'aide du niveau que l'on place sur cet axe. Soit n le milieu de la bulle dans une position quelconque de l'instrument. On enlève le niveau et on le retourne bout pour bout en le replaçant sur l'axe horizontal. Soit n' la division qui répond au milieu de la bulle dans le second cas. On aura l'inclinaison i' de cet axe sur l'horizontale par

$$i = \frac{n' - n}{2},$$

et l'angle de cet axe secondaire avec le principal sera $90^0 \pm i$. Pour corriger ce défaut, on agira sur une vis placée à l'extrémité de cet axe et butant contre le châssis supérieur, jusqu'à ce que le milieu de la bulle marque $\frac{n + n'}{2}$.

Mesure des azimuts à l'aide du théodolite.

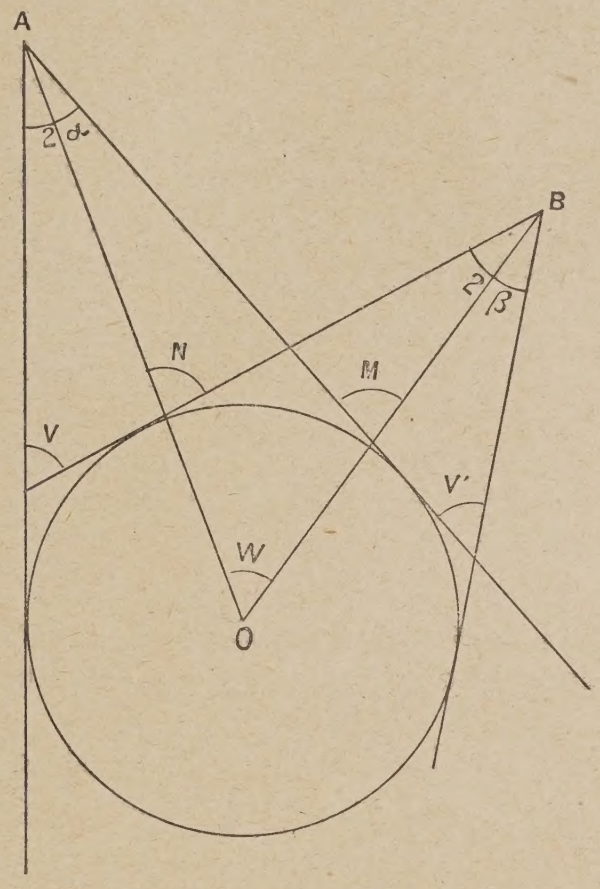
Ces trois rectifications étant opérées, l'instrument est en état de donner les coordonnées zénithales d'un point quelconque. Commençons par l'azimut.

Si l'on se sert d'un théodolite excentré, il faut distinguer les deux positions qu'on peut donner à la lunette, à savoir, lunette *à droite* de l'axe principal ou lunette *à gauche*. Adoptons la première disposition. On pointera avec la lunette le signal à viser et on lira les deux verniers du cercle horizontal. Leur moyenne donnera la direction de la trace horizontale d'un plan passant par l'axe parallèlement à celui que décrirait actuellement la lunette. Dans le cas d'un astre, ce sera évidemment le vertical même de l'astre, puisque l'excentricité de la lunette est nulle par rapport à la distance de cet astre. Si donc, dans ce cas, l'instrument étant bien réglé, on recommençait la même opération lunette à gauche, on retrouverait la même lecture.

Mais quand il s'agit d'objets terrestres, les distances au pied de l'instrument ne sont pas infiniment grandes par rapport à la lon-

gueur du bras qui porte excentriquement la lunette. Si l'on se propose de mesurer l'angle dièdre compris entre les verticaux de deux signaux B et C, comme c'est le cas en géodésie dans les mesures d'angles, l'excentricité de la lunette influera sur les directions où l'on voit les signaux B et C, suivant qu'on les observera du côté droit ou du côté gauche. Il est aisé d'agencer les mesures de manière à éliminer cette cause d'erreur. En effet, la

Fig. 39 *bis*.



vraie direction du point B vu du centre de l'instrument est donnée par la demi-somme des directions observées lunette à droite, puis lunette à gauche. Soient u et u'' les deux lectures; on aura :

$$\text{Direction du point B.....} \quad \frac{u + u''}{2}.$$

En opérant sur le point C, on aura de même, en désignant par u' et u''' les deux lectures :

$$\text{Direction du point C.....} \quad \frac{u' + u'''}{2}.$$

Donc

$$\text{Différence d'azimut } A' - A = \frac{u' + u'''}{2} - \frac{u + u''}{2},$$

Comme on peut l'écrire

$$\frac{u' - u}{2} + \frac{u''' - u''}{2},$$

cela revient à mesurer la différence des azimuts lunette à droite, puis à la mesurer une seconde fois lunette à gauche et à prendre la moyenne des résultats. Cette moyenne sera exempte de l'excentricité de la lunette et, d'ailleurs aussi, du défaut de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de rotation.

Un simple coup d'œil sur la figure 39 *bis* conduit au même résultat. Soient O le centre de l'instrument, A, B, les points visés; l'angle cherché est W. La figure donne immédiatement

$$V = N - \alpha = W - \alpha - \beta,$$
$$V' = M - \beta = W + \alpha - \beta,$$

d'où

$$2W = V + V', \qquad W = \frac{V + V'}{2}.$$

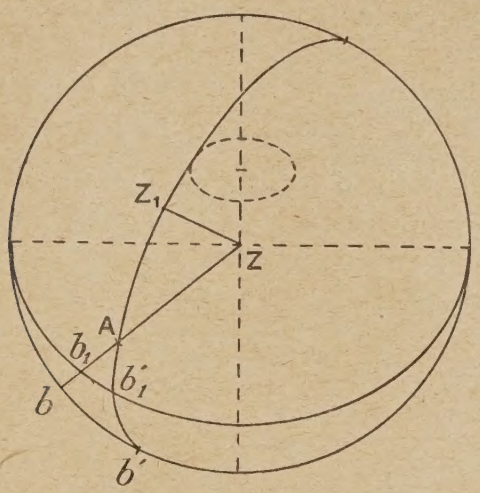
Erreurs dues à une rectification imparfaite, dans la détermination des azimuts.

Quelque bien construit et quelque bien réglé que soit un instrument, les conditions théoriques qu'il doit remplir ne se conservent jamais, quand cela ne serait que par suite des variations de température et des flexions dues à l'élasticité, car les diverses parties de cet instrument ne sont pas des solides invariables. Il faut donc avoir déterminé au moyen du niveau et par deux visées sur un point éloigné faites à 180° l'une de l'autre les erreurs résiduelles d'inclinaison et de collimation, de façon à pouvoir corriger les observations de leurs effets, ou éliminer par la méthode d'observation l'influence des erreurs dont la valeur est inconnue.

Erreur d'inclinaison. — Elle est due à deux causes; la non-verticalité de l'axe principal et la non-perpendicularité de l'axe secondaire sur l'axe principal. Projetons la sphère céleste, de rayon égal

à l'unité, sur le plan de la figure 39 *ter*; l'horizon étant représenté par une circonférence, le zénith sera projeté au centre en Z, c'est le point où la verticale du centre du cercle divisé HH′ vient percer la sphère et également celui où la percerait la direction de l'axe

Fig. 39 *ter*.



principal, si l'instrument était bien réglé. Par suite de l'erreur d'inclinaison, due aux deux causes que nous avons dites, le plan de visée dirigé sur le signal A, au lieu de couper la sphère suivant le grand cercle Z*b* perpendiculaire au plan de l'horizon, la coupera suivant un grand cercle incliné $Z_1\, b'$. L'inclinaison totale i de ce plan résulte d'une inclinaison i' de l'axe principal par rapport à la verticale et d'un défaut de perpendicularité i'' de l'axe des tourillons sur l'axe principal. La ligne de visée, supposée sans erreur de collimation, perce la sphère en A. Le plan azimutal vrai est ZA, correspondant à une lecture b sur le limbe horizontal. Le plan azimutal instrumental est Z_1A, correspondant à une lecture b', sur le limbe, lequel est incliné d'un angle i', puisqu'il est invariablement lié à l'axe principal.

Abaissons de Z l'arc de grand cercle ZZ_1 perpendiculaire, sur Z_1 A; l'arc ZZ_1 mesure l'inclinaison i du plan de visée, telle que la donne le niveau. Considérons les deux triangles AZZ_1 et $Ab_1\, b'_1$, nous aurons :

$$\sin A = \frac{\sin i}{\sin z} = \frac{\sin b_1 b'_1}{\sin A\, b_1} \sin A\, b'_1\, b_1,$$

z étant la distance zénithale du point visé A. Négligeant des grandeurs du second ordre par rapport à i, i' et i'' considérés comme

étant du premier ordre de petitesse, nous aurons :

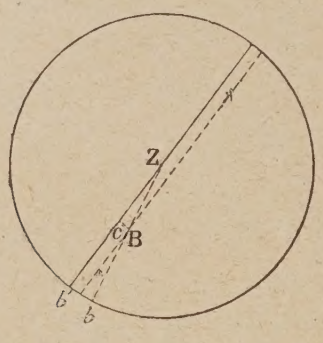
$$\frac{\sin i}{\sin z} = \frac{\sin bb'}{\cos z},$$

d'où, dans les mêmes conditions, la correction bb' :

$$bb' = i \cot z.$$

Erreur de collimation. — Si la ligne de visée n'est pas bien perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette, désignons l'angle de ces deux lignes par $90^\circ \pm c$, c étant ce qu'on nomme l'*erreur de collimation.* La ligne de visée, en tournant autour de l'axe horizontal, décrira un cône et dessinera sur le ciel un petit cercle passant à la distance c du zénith et par l'objet visé B. Le théodolite fournira la direction Zb', tandis que la vraie direction est Zb. L'erreur en azimut est donc ici (*fig.* 40) :

Fig. 40.



$$bZb' = \frac{c}{\sin ZB} = \frac{c}{\sin z}.$$

On peut l'éliminer en observant la direction azimutale du point B dans les deux positions de l'instrument et en prenant la moyenne. Mais, dans les observations de précision en géodésie, on corrige chaque visée de l'erreur de collimation, et comme les opérations comprennent toujours plusieurs déterminations du même azimut, comme nous le verrons par la suite, on élimine les petites erreurs résiduelles pouvant provenir d'une détermination imparfaite de la collimation c en opérant successivement dans les deux positions de l'instrument.

On a dû remarquer que nous avons étudié chaque erreur isolément, comme si les deux autres n'existaient pas. Les choses ne

se passent pas ainsi en général; les trois erreurs se présentent à la fois et, en toute rigueur, leurs effets dépendraient non seulement de leurs premières puissances, mais aussi des termes supérieurs comprenant leurs produits deux à deux, etc. Cependant la marche suivie est légitime tant que ces termes supérieurs sont négligeables; or il faudrait une rectification bien grossière pour qu'ils ne le fussent pas.

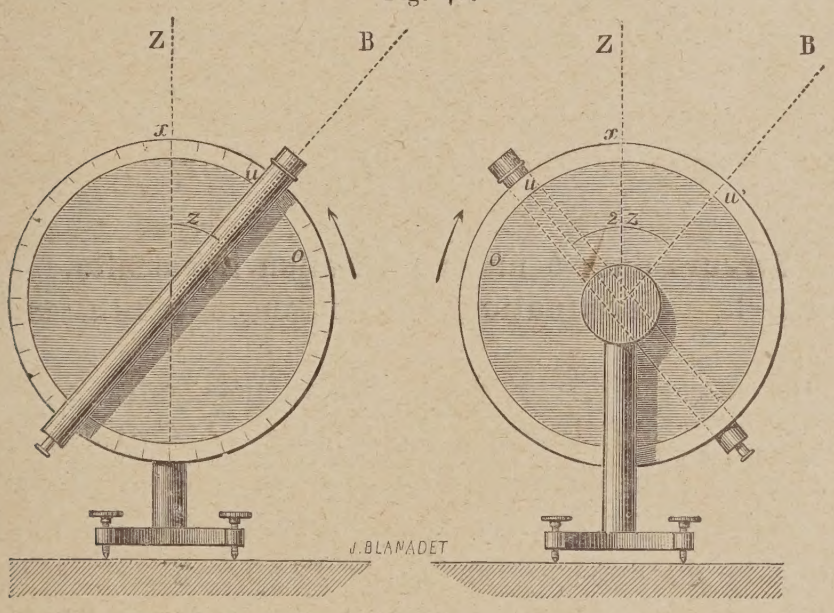
En résumé, si l'on a fait au théodolite, en visant un objet B, une lecture L_0 sur le cercle horizontal, la lecture L corrigée sera :

$$L = L_0 \pm i \cot z \pm c \operatorname{cosec} z.$$

Mesure des distances zénithales à l'aide du théodolite.

L'axe du théodolite étant bien vertical, on amène le plan vertical décrit par la lunette à passer par l'objet. Cela peut se faire de deux manières, lunette à droite ou lunette à gauche. On choisit, pour commencer, celle de ces deux positions (symétriques par

Fig. 41.



rapport à l'axe) où les divisions du limbe vertical croissent en sens inverse de la distance qu'on veut mesurer du zénith à l'objet (celui de la flèche). Supposons que ce soit la première. On dirige la lunette sur ce point, on fixe le cercle alidade qui la supporte au cercle limbe qui fait corps avec l'axe principal et on lit les ver-

niers. Désignons par u leur moyenne. Si l'on connaissait la division x qui répond au zénith, $x - u$ serait la distance zénithale cherchée z.

Pour éliminer cette inconnue, on a recours au retournement. On fait décrire à l'instrument tout entier 180° autour de la verticale, puis, la lunette étant à gauche, on la dégage en desserrant la mâchoire qui la fixe au limbe vertical et on la fait tourner autour de son axe horizontal jusqu'à ce que la ligne de visée passe par le point B. La lunette a évidemment décrit ainsi $2z$; on la fixe de nouveau et l'on achève, au besoin, le pointé par la vis de rappel qui joint la mâchoire au cercle alidade. Enfin, on lit les verniers, dont la moyenne sera u'. On aura dès lors :

$$z = \frac{u' - u}{2}, \qquad x = \frac{u' + u}{2}.$$

S'il s'agit d'objets terrestres dont la distance n'est pas infinie par rapport à l'excentricité de la lunette, la distance zénithale ainsi obtenue sera un peu trop faible. On trouvera aisément que l'erreur est, en désignant par e l'excentricité et par d la distance de l'objet,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{e}{d}\right)^2 \cot z,$$

quantité absolument insensible dans la pratique.

Erreurs dues à une rectification imparfaite, dans la détermination des distances zénithales.

La seule cause d'erreur dont il soit nécessaire de se préoccuper, c'est l'inclinaison de l'axe principal. Cette inclinaison, estimée dans le plan de l'objet observé, se reporte en entier sur la distance zénithale conclue, car le théodolite ne donne, en réalité, que la distance angulaire de l'objet observé à l'axe de l'instrument. Mais le niveau fournit immédiatement la correction nécessaire, pourvu qu'on lise ses indications dans les deux positions de l'instrument, au moment même du pointé ou du moins immédiatement après chaque pointé. On corrige même ainsi la très petite déviation que l'axe pourrait prendre, dans le retournement, par le jeu qu'il doit avoir dans sa douille.

Voici la règle à suivre à cet égard. Supposons d'abord que le niveau soit gradué à la manière des instruments astronomiques, c'est-à-dire avec le zéro à l'un des bouts, et que la graduation du niveau soit de sens opposé à celle du limbe vertical. Désignons par n la division qui répond au milieu de la bulle cercle à droite, c'est-à-dire pour le premier pointé, et par n' la lecture faite cercle à gauche, c'est-à-dire pour le second pointé; nous aurons

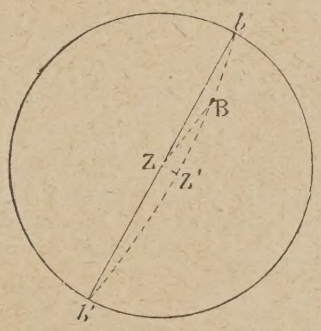
$$z = \frac{u' - u}{2} + \frac{n' - n}{2}.$$

On se rend compte du signe + si l'on se rappelle qu'en exprimant l'inclinaison par $\frac{n' - n}{2}$, l'axe penche du côté où se trouve le zéro du niveau dans la première position, c'est-à-dire, ici, du côté où se trouve l'objet. Dans tous les cas, on applique la susdite correction avec son signe.

Quant aux corrections dues à l'inclinaison i de l'axe de la lunette et à l'erreur c de collimation, les corrections applicables de ce chef à la distance zénithale observée sont du second ordre de petitesse par rapport à i et à c. Comme ces dernières peuvent toujours être réduites à quelques secondes, les premières sont absolument insensibles.

Supposons, en effet, que l'axe de la lunette ait une inclinaison $i' = ZZ'$; le grand cercle décrit par la ligne de visée et passant par

Fig. 42.



l'objet B sera Z' B; sa trace horizontale sera $b Z b'$; la distance zénithale vraie sera ZB $= z$; la distance zénithale donnée par le théodolite sera Z' B $= z'$. L'arc ZZ' étant perpendiculaire à Z' B, le triangle rectangle ZZ' B donnera

$$B = \frac{i'}{\sin z} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} z' = \operatorname{tang} z \cos B.$$

Or, en réduisant $z - z'$ en série, on a, pour le premier terme,

$$z - z' = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \mathrm{B} \sin 2z \ldots = \frac{1}{4} \frac{i'^2}{\sin^2 z} \times 2 \sin z \cos z = \frac{1}{2} \frac{i'^2}{\operatorname{tang} z}.$$

On aurait pareillement, pour l'erreur de collimation c,

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{\operatorname{tang} z},$$

et, comme il s'agit ici de termes du second ordre de petitesse, c'est-à-dire de carrés, le double produit est du même ordre. En le calculant, on trouverait, pour la correction due aux deux erreurs à la fois,

$$\frac{1}{2} \frac{i'^2 + c^2}{\operatorname{tang} z} + \frac{i' c}{\sin z}.$$

Si nous supposons i et c réduits à une dizaine de secondes sexagésimales ou, en parties du rayon, $10'' \times \sin 1'' = \frac{10}{206\,265}$, quantité dont le carré est excessivement petit. En calculant, pour $z = 1^\circ$, la correction en secondes due à i', on trouverait :

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{10^2}}{206\,265} \cot 1^\circ$$

$\log 50 \ldots\ldots\ldots$	$1{\cdot}699$
$\log 206\,265 \ldots\ldots$	$5{\cdot}314$
	$6{\cdot}385 - 10$
$\log \cot 1^\circ \ldots\ldots$	$1{\cdot}758$
	$8{\cdot}143$
Nombre....	$0'',014$

c'est-à-dire une correction tout à fait négligeable.

Si nous supposons l'axe nivelé à une minute centésimale et z voisin de 100 grades, cas ordinaire de la géodésie, en admettant $z = 95^{gr}$, $i' = 100''$ on trouverait pour la correction due à i' $x = 0''{,}006$.

Retenons seulement de cette discussion que c'est surtout dans le cas où l'on a à mesurer des distances zénithales très faibles qu'il faut apporter un grand soin aux diverses rectifications de l'instrument.

Nous avons traité en détail tout ce qui se rapporte au théodolite, parce qu'il est le type de tous les instruments de mesure en Astronomie, en Géodésie, en Topographie, etc. Par exemple, la

théorie de l'équatorial se ramène purement et simplement à celle du théodolite en substituant le pôle au zénith.

Méthode de la répétition.

Par une seule mesure de distance zénithale ou d'azimut, au théodolite, on n'atteindrait qu'un degré assez faible de précision, car, d'une part, la lecture d'un vernier ne donne que les 10″ ou, par une estime plus ou moins incertaine, les 5″, d'autre part, il faut compter avec les erreurs de division, l'erreur de pointé, le résidu des erreurs instrumentales, etc. On serait donc loin d'atteindre le but qu'on se propose s'il n'y avait, dans la multiplication et l'agencement des mesures, des ressources que nous allons étudier. Considérons d'abord les erreurs de division. En se bornant à l'arc $u' - u$ mesuré sur le limbe, si l'on désigne par ε' et ε les corrections inconnues qu'il faudrait ajouter aux lectures u' et u pour en tenir compte, l'arc véritable serait $u' - u + \varepsilon' - \varepsilon$. Supposons que par un artifice quelconque on ait mesuré, non pas l'angle proposé, mais un multiple de cet angle, par exemple, vingt fois cet arc. On n'emploiera pour cela que les traits extrêmes, que nous pouvons toujours représenter par u' et u, et alors on aurait pour l'arc simple $\frac{u' - u}{20} + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{20}$, d'où l'on voit que l'erreur relative des deux traits n'entrerait ici que pour le vingtième de sa valeur. Il y a donc là un moyen d'atténuer indéfiniment l'effet de cette erreur.

Angles horizontaux.

Pour mesurer l'angle BOC (sans figure), on amènera le vernier du cercle alidade sur une division quelconque u du cercle limbe, et l'on fixera l'alidade au limbe. Ensuite on fera tourner tout l'instrument jusqu'à ce que la lunette soit pointée dans la direction OB. A ce moment, le vernier marque toujours la division u, et l'ensemble des deux cercles limbe et alidade est fixé invariablement au pied de l'instrument. Pour achever la mesure de l'angle, on détache le cercle alidade, ce qui rend la lunette libre, mais non le limbe gradué, et l'on dirige la lunette sur l'objet C. On fixe alors de nouveau le cercle alidade au cercle limbe. Si alors on lisait le

vernier, on aurait l'arc parcouru une première fois sur le limbe. Mais, au lieu de faire cette lecture, on recommence la même opération en prenant cette fois, pour origine de l'arc à mesurer, le point d'arrivée de la première.

A cet effet, on desserre la mâchoire qui unit le limbe au pied du théodolite, et l'on fait tourner l'instrument entier de manière à pointer sur l'objet B. On fixe alors le limbe au pied, et l'on se retrouve ainsi dans la première position, avec cette seule différence que le vernier répond, cette fois, à l'extrémité de l'arc une première fois parcouru sur le limbe. Partant de cette nouvelle origine, on mesure une seconde fois l'arc BOC, et pour cela, on desserre la mâchoire qui unit le cercle limbe au cercle alidade; on amène la lunette sur l'objet C et on la fixe dans cette dernière position. L'arc parcouru sur le limbe depuis le premier pointé est évidemment égal au double de BOC. En continuant ces opérations, on obtiendra successivement le triple, le quadruple, etc., de cet angle. Il suffit de noter le nombre n des répétitions et de lire à la fin le vernier, qui donnera la division u'. On aura donc

$$\mathrm{BOC} = \frac{u' - u}{n},$$

expression où l'erreur relative des traits u' et u se trouve aussi divisée par n.

L'erreur de pointé qui affecterait une seule mesure n'est pas réduite dans la même proportion; nous verrons plus tard que, si l'on désigne par η l'erreur probable qui dépend de l'incertitude propre au pointé, l'angle conclu par la moyenne de n mesures se réduit seulement à

$$\frac{\eta}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, si l'on a mesuré un angle par vingt-cinq répétitions, l'erreur de division des deux seuls traits employés, à savoir le premier et le dernier, se trouvera divisée par 25, et l'erreur de pointé par 5.

La seule condition instrumentale à laquelle cette méthode si puissante doive satisfaire, c'est que l'instrument ne se dérange pas lorsqu'on passe de la première mesure à la deuxième, de la deuxième à la troisième, etc., c'est-à-dire qu'en déplaçant tout ensemble le cercle alidade et le cercle limbe, solidement reliés par

une mâchoire, pour recommencer la mesure de l'angle BOC, le vernier de l'un ne glisse pas sur la division de l'autre. En d'autres termes, il faut que le point d'arrivée de la première mesure soit bien le point de départ de la seconde.

Le théodolite, tel que nous l'avons décrit, ne se prêterait pas à ces diverses manœuvres, parce que le cercle horizontal gradué fait corps avec le pied. Il faut que ce limbe puisse être, à volonté, rendu libre ou fixé au pied. De là un mode de construction spécial pour les instruments répétiteurs. Il consiste en ce que le limbe est porté par l'axe lui-même, tandis que le cercle alidade est soudé à une douille additionnelle qui s'emboîte sur la partie supérieure de l'axe. Le pied ne porte plus aucun cercle, mais seulement un bras muni d'une mâchoire auquel on fixe à volonté le cercle limbe, et par suite l'axe de l'instrument, tandis que la douille supérieure portant le châssis de la lunette et le cercle alidade tourne librement, à moins qu'on ne vienne à le fixer au cercle limbe par une seconde mâchoire (1).

Angles verticaux.

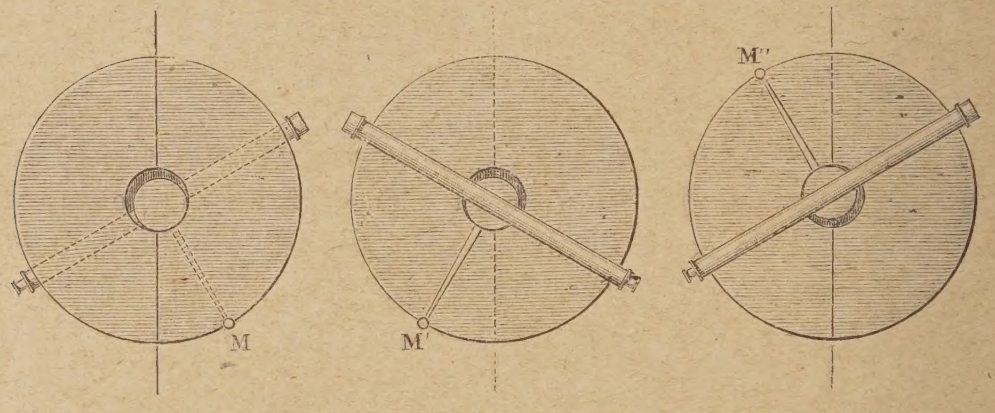
On opère de même pour les angles verticaux; par conséquent, la partie supérieure de l'instrument, c'est-à-dire son axe de rotation horizontal, le cercle limbe et le cercle alidade doivent être disposés de manière à permettre la répétition. C'est ici l'angle double $2z$, qu'on obtient par une seule mesure à l'aide du retournement. Si l'on prend pour origine de la deuxième le point d'arrivée de la première, la deuxième mesure donnera $4z$, et ainsi de suite. Au bout de vingt-cinq répétitions, l'arc parcouru $u' - u$ devra être divisé par 50, ce qui rend 50 fois moindre l'erreur de la graduation et 10 fois moindre l'erreur du pointé. On comprend comment, par ce procédé remarquable, on obtient, à quelques dixièmes de seconde près, des angles qu'on ne mesurerait qu'à $5''$ ou $6''$ par une seule opération. Ici, comme pour les angles horizontaux, la seule condition instrumentale est que le point de départ d'une mesure soit bien le point d'arrivée de la précédente. Pour cela, il faudrait qu'en faisant mouvoir la lunette avec les deux cercles

(1) Cette méthode n'est plus, en pratique, employée aujourd'hui où l'on ne fait guère usage que de la méthode de la réitération.

pour passer d'une mesure à la suivante, cet ensemble fût bien invariable. Or, dans ce mouvement où l'on met en jeu l'inertie de masses assez notables, il est bien difficile que les axes et leurs douilles, dont le contact n'est pas parfait, ne se déplacent pas. Quand il s'agit de la mesure des angles horizontaux, on évite cet inconvénient en opérant avec précaution, parce que les forces extérieures (la gravité) dont on ne dispose pas agissent de la même manière sur toutes les parties, et que la rotation imprimée au théodolite a lieu autour d'un axe vertical. Mais, pour les angles verticaux, il n'en est plus de même quand on fait tourner l'appareil autour de l'axe horizontal.

Les trois figures ci-jointes présentent les positions de l'instrument lorsqu'on passe de la fin d'une mesure au commencement de la suivante. Dans la première, l'axe repose sur la douille par sa partie inférieure. Il est alors fixé au limbe par la mâchoire M. Pour

Fig. 43.



recommencer, il faut faire tourner l'instrument de 180° autour de la verticale et l'amener dans une position symétrique. Rien n'est changé par là, car la pesanteur agit encore de même, et l'axe repose encore par le même point dans sa douille. Lorsqu'on veut procéder à la mesure suivante sans toucher aux verniers, il faut faire tourner tout l'appareil autour de l'horizontale pour amener la lunette dans la direction de l'objet. Mais, dans cette dernière position, l'axe n'est plus soutenu par la douille; il tend à tomber pour la toucher par sa partie inférieure, en tournant autour de la mâchoire qui se trouve alors en M″.

Si celle-ci ne cède pas, l'élasticité des pièces se prête pourtant à ce petit jeu; l'axe se déplace légèrement, entraînant avec lui la

lunette. Celle-ci tourne donc d'un très petit angle autour de M″, angle que les verniers permettraient de lire sur le limbe, s'il n'était à la limite même de la précision fournie par les verniers. Toujours est-il que le point de départ de la nouvelle mesure n'est plus rigoureusement le même que le point d'arrivée de la précédente et que la condition essentielle de la répétition ne se trouve pas réalisée. Comme le même défaut se reproduit à chaque mesure nouvelle, dans le même sens, si l'on désigne sa grandeur par α, l'angle répété n fois est vicié de la quantité $n\alpha$, en sorte qu'en divisant par n, on se trouve avoir introduit l'erreur entière α dans le résultat final.

Il est bien remarquable que chaque mesure isolée obtenue par simple retournement soit indépendante de toute erreur de ce genre. Que l'axe ballotte dans sa douille, peu importe, si l'on a recours à deux verniers opposés. Dans la répétition, au contraire, le jeu des axes ne saurait être annulé que si l'on avait, pour fixer le cercle alidade au cercle limbe, deux mâchoires opposées.

La méthode de la répétition a été introduite en France par Borda. On s'en est servi longtemps avant de reconnaître qu'elle donne, pour chaque instrument, des distances zénithales affectées d'une même erreur α dans un même sens, erreur qui va en augmentant avec le temps, à mesure que le jeu des axes augmente par l'usure.

Lorsqu'on eut découvert cette erreur, on renonça petit à petit à cette méthode, pourtant si simple et si ingénieuse, et on lui substitua, dans tous les pays, une méthode plus longue, demandant plus de pointés, plus de lectures de verniers ou de microscopes, mais qui échappe au vice que nous venons de signaler, en même temps qu'elle supprime la petite complication de construction des instruments répétiteurs ; c'est la *méthode de la réitération*.

Méthode de la réitération.

Nous venons de voir que la mesure simple d'un angle est indépendante du jeu des axes, pourvu qu'on emploie des verniers opposés ou équidistants, et qu'on lise le niveau dans chaque position quand il s'agit d'angles verticaux. Si l'on recommençait n fois la même mesure avec les mêmes traits, on rendrait l'erreur de

pointé $\sqrt{n}$ fois plus petite, mais l'erreur relative des deux divisions employées resterait en entier. Pour atténuer celle-ci, sans répétition, voici comment on opère. Soient m le nombre des verniers équidistants, et par conséquent $\frac{360^\circ}{m}$ l'arc compris entre deux verniers consécutifs. Désignons de plus par n le nombre des mesures qu'on veut faire du même angle. On prendra successivement pour origine les divisions u (celle-ci est arbitraire), puis

$$u+\frac{360^\circ}{mn},\quad u+2\frac{360^\circ}{mn},\quad u+3\frac{360^\circ}{mn},\quad \ldots,\quad u+(n-1)\frac{360^\circ}{mn},$$

on mesurera chaque fois le même angle par le procédé ordinaire en lisant à chaque opération les m verniers dont la somme doit être naturellement divisée par n. Les n mesures distinctes sont affectées des erreurs de division des traits employés; mais, en prenant la moyenne de ces n mesures, le résultat final ne sera plus affecté que des termes éloignés de la série qui représente ces erreurs, ceux dont l'indice de multiplicité est divisible par mn. En effet, ce résultat final est précisément ce qu'on aurait obtenu si, au lieu d'employer m verniers équidistants, on en avait mis le nombre mn tout autour du cercle. On a donc éliminé ainsi la plus grande partie des erreurs systématiques de la division et réduit notablement l'effet des erreurs accidentelles du pointé.

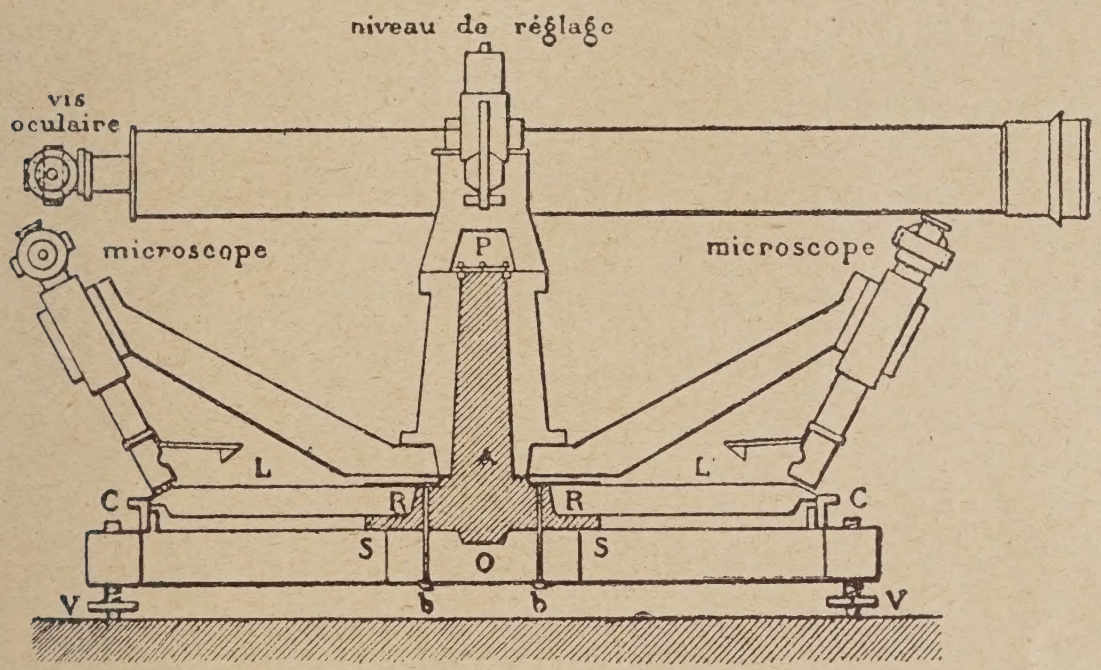
Mais ce moyen est très pénible. Dans le cas de vingt-cinq répétitions et de deux verniers, nous avions en tout quatre lectures à faire, deux au commencement et deux à la fin; quand il s'agit de vingt-cinq réitérations, il y a cinquante verniers à lire. Il y faut donc beaucoup plus de temps et de peine.

Cercle azimutal (*fig.* 43 *bis*).

On emploie, dans les opérations géodésiques de haute précision, un instrument différent du théodolite, le *cercle azimutal réitérateur*, uniquement disposé pour la mesure des azimuts. Réduit à ses éléments essentiels, il se compose d'un limbe gradué LL′ et d'une alidade montée autour d'un axe commun A. Cet axe, en acier, de section tronconique, fait corps avec le pied de l'instrument, lequel se prolonge horizontalement par trois bras portés par trois vis

calantes. Un anneau circulaire C, fixé aux bras, entoure et protège le limbe. Pour permettre la réitération, qui exige que l'on puisse changer l'origine des visées successives faites sur les signaux dont on veut mesurer les angles qu'elles forment entre elles, le cercle divisé RR, monté sur l'axe A, est emboîté entre la masse centrale du pied et une rondelle de cuivre, contre laquelle il peut être pressé au moyen de trois vis butantes *b*. Lorsque ces vis sont serrées, le limbe est absolument indépendant de l'alidade mobile

Fig. 43 *bis*.



qui porte la lunette et les microscopes à micromètre, et est assujetti dans une position invariable; si elles sont desserrées, le limbe peut tourner à frottement doux autour de l'axe, ce qui permet de changer l'origine.

De la base de l'alidade partent quatre bras inclinés, sur lesquels sont montés les microscopes à micromètre. Ces microscopes sont fixés de telle sorte que leurs axes, inclinés vers l'intérieur du cercle, soient normaux à la surface du limbe gradué.

L'alidade porte, en outre, un bras horizontal sur lequel est tracé un trait ou index en face duquel on lit à l'aide d'une loupe les grades et les dizaines de minutes qui correspondent au trait. Cet

---

(1) On ne voit que deux de ces vis sur la figure.

instrument, en France, est en division centésimale. La graduation est, d'ordinaire, de 10' en 10', la chiffraison est de 5 en 5 grades.

Le rayon du cercle varie de 30 à 42^{cm}. Les microscopes à micromètre, qui sont au nombre de quatre, sont réglés de manière que la distance apparente de 2 traits consécutifs du limbe corresponde à très peu près à 2 tours et demi de la vis ou à 250 divisions du tambour (1). Chaque tour de vis vaut ainsi 4' et chaque division du tambour, lequel est divisé en 100 parties, 4". Il suffit donc d'ajouter les quatre lectures des microscopes pour obtenir la lecture angulaire complémentaire, comme l'indique l'exemple ci-dessous :

Index 120^{G},7 :

Microscope n° 1 =	1 tour	36,3
» n° 2 =	1	32,9
» n° 3 =	1	34,7
» n° 4 =	1	37,1
Somme =	5	41,0

Pour convertir ces tours et fractions de tours en minutes et secondes, il faudrait faire l'opération :

$$\frac{5^{tours},410 \times 4'\,00'',0}{4} = 5'\,41'',0,$$

et la lecture complète sera :

$$120^{G},75'\,41'',0.$$

Disons en terminant que l'on a également construit des théodolites à microscopes (deux microscopes par limbe, d'ordinaire), où des microscopes à micromètres ont été substitués aux verniers.

---

(1) Une petite correction dite de *tare* des microscopes permet de tenir compte de la petite différence pouvant exister entre 250 divisions du tambour et 10 minutes, valeur angulaire de l'intervalle de deux traits.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE LA RÉFRACTION ATMOSPHÉRIQUE.

Ainsi, au moyen d'un instrument bien construit, pourvu d'une bonne lunette et en appliquant une méthode correcte, on parvient à mesurer les coordonnées zénithales d'un astre ou d'un objet terrestre avec la précision d'une fraction de seconde. Mais nous voyons les objets à travers l'atmosphère dont notre globe est entouré; cette atmosphère réfracte les rayons lumineux qui la traversent et altère la direction dans laquelle nous voyons les objets. Quand il s'agit des astres, c'est l'atmosphère tout entière qui intervient; dans le cas des objets terrestres, elle n'agit sur le rayon visuel que par ses couches les plus basses. De là la distinction qu'il convient d'établir entre la réfraction *astronomique*, dont nous allons nous occuper, et la réfraction *géodésique*, que nous traiterons plus tard.

La réfraction est un point faible en Astronomie. Pour la calculer exactement, il faudrait connaître la constitution de l'atmosphère, ou du moins la succession des indices de réfraction des couches que le rayon de lumière traverse sous des incidences variées. Dans l'ignorance où nous sommes à cet égard, on en est réduit à recourir à des hypothèses plus ou moins voisines de la réalité; heureusement, le pouvoir réfringent de l'air dans les basses régions est très faible, il va en décroissant avec la hauteur, en sorte que les réfractions que nous aurons à calculer seront toujours très petites, et nous verrons qu'on les obtient avec une approximation suffisante dans tous les cas où il y a intérêt réel à les déterminer.

Si l'atmosphère était en équilibre, la densité de l'air, de plus en plus pressé par les couches supérieures, irait en croissant réguliè-

rement jusqu'au sol. Pour appliquer l'analyse à cet état, il suffit de se représenter l'enveloppe aérienne comme formée de couches concentriques au globe terrestre, couches homogènes dans toute leur étendue, mais dont la densité décroît de couche en couche à mesure qu'on s'élève au-dessus du sol. L'indice de réfraction de chacune d'elles varie depuis la surface libre de l'atmosphère, où il se réduit à 1, comme dans le vide, jusqu'à la couche inférieure, où il est 1,000294, du moins à la température 0° et à la pression de 760^{mm}.

Considérons un rayon venant de l'espace interplanétaire où règne le vide et pénétrant dans notre atmosphère; si, par ce rayon et le centre de la Terre, on imagine un plan, ce plan coupera normalement toutes les couches d'air successives. Le rayon réfracté par la première couche ne sortira donc pas de ce plan; il en sera de même au passage de la première couche à la deuxième, et ainsi de suite jusqu'au sol. Ainsi la réfraction n'altère pas le vertical d'un astre et ne modifie en rien son azimut. Mais, comme l'indice de réfraction va en croissant de couche en couche, à chacune de ces couches le rayon réfracté se rapprochera de la normale au point d'incidence et décrira ainsi une courbe concave vers le sol, dont le dernier élément donnera la direction dans laquelle l'astre est vu par l'observateur. Cet astre paraîtra donc un peu plus près du zénith qu'il ne le serait sans l'interposition de l'atmosphère. La réfraction aura donc pour unique effet de relever un peu chaque astre dans son vertical, d'en diminuer un peu la distance zénithale.

A la vérité, l'atmosphère, soumise d'un côté à l'échauffement produit par le Soleil, de l'autre au refroidissement nocturne, ne saurait être en équilibre. Elle est en mouvement incessant; mais, comme ces mouvements mêmes ont pour but de rétablir l'équilibre, ils ne produisent, en définitive, qu'une oscillation continuelle autour de cet état d'équilibre fictif dont l'atmosphère ne s'écarte jamais beaucoup ni longtemps. Les grands mouvements dont elle est le théâtre ne répondent, en général, qu'à d'assez faibles dénivellations, en sorte que nous pourrons conserver notre hypothèse de couches isolément homogènes, concentriques, à densités croissantes, tout en avouant que la loi de ces densités doit être fort complexe et n'est pas de nature à figurer dans notre ana-

lyse. Nous verrons qu'on peut, dans certaines conditions d'approximations, la laisser indéterminée.

Si nous supposons la Terre sphérique, ainsi que les couches concentriques de l'atmosphère, la réfraction sera la même dans tous les azimuts autour de la station d'observation. Cette hypothèse n'est pas rigoureuse, mais la surface de la Terre s'écarte si peu de celle d'une sphère qu'on peut l'admettre sans erreur sensible en ce qui concerne les effets de la réfraction.

Un simple théorème de Physique fera comprendre que l'on puisse calculer néanmoins, en certains cas, la déviation totale, subie par le rayon lumineux en passant du vide extérieur dans la couche où l'observateur est plongé et dont il connaît l'action réfringente, par la formule

$$(l_1 - 1)\frac{b}{760}\frac{1}{1 + 0{,}00366\,t} \quad (1),$$

b désignant la pression barométrique actuelle, t la température centigrade de l'air ambiant, l_1 l'indice normal, dont nous avons donné plus haut la valeur.

Négligeons tout d'abord la courbure de la Terre, et soient :

l_n, l_{n-1}, ... les indices de couches successives dont nous négligerons provisoirement la courbure;

I_n, I_{n-1}, ... les angles d'incidence d'un rayon lumineux qui les traverse;

R_n, R_{n-1}, ... les angles de réfraction.

Nous aurons :

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n},$$

$$\frac{\sin I_{n-1}}{\sin R_{n-1}} = \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}},$$

---

(1) En réalité, c'est $l_1^2 - 1$ qui, d'après la théorie, est proportionnel à la densité, et non pas $l_1 - 1$; mais, si l'on désigne l_1 par $1 + \alpha$,

$$l_1^2 - 1 = 2\alpha + \alpha^2 = 2(l_1 - 1) + \alpha^2,$$

quantité qui ne diffère de $2(l_1^2 - 1)$ que du carré de 0,000294; $l_1 - 1$ est donc sensiblement proportionnel à $l_1^2 - 1$ quand il s'agit de l'air.

et ainsi de suite, de couche en couche. Les normales à ces couches étant parallèles, puisque nous négligeons leur courbure, $R_n = I_{n-1}$, en sorte qu'on peut écrire :

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1}}{l_n},$$

ou bien encore

$$l_n \sin I_n = l_{n-1} \sin I_{n-1},$$

ou, d'une manière générale,

$$l \sin I = \text{const.}$$

dans toute l'étendue de la trajectoire.

Soient z l'angle d'incidence à la limite de l'atmosphère, là où $l = 1$, et z_1 l'angle d'incidence pour l'observateur plongé dans la couche où $l = l_1$; nous aurons :

$$\sin z = l_1 \sin z_1.$$

Désignons enfin la réfraction $z - z_1$ par ρ ; il viendra

$$\sin(z_1 + \rho) = l_1 \sin z_1,$$

équation qui donnera ρ en fonction de la distance zénithale observée z_1, et de l'indice de la dernière couche qu'on calcule par la formule (1), et cela sans qu'on ait eu besoin de connaître la loi de succession des indices dans toute l'étendue de l'atmosphère.

Nous allons voir qu'il en est de même lorsqu'on tient compte de la sphéricité des couches, mais à la condition de ne pas pousser l'application des formules à des distances zénithales trop fortes, car alors reparaît la nécessité de tenir compte de la loi de succession des indices, autrement dit de la constitution de l'atmosphère.

Théorie de la réfraction, en tenant compte de la courbure de la Terre.

Les couches concentriques dont l'atmosphère est supposée formée étant sphériques, la trajectoire lumineuse est située dans le vertical de l'astre, c'est-à-dire dans le plan passant par l'astre et la verticale de l'observateur. Soient (*fig.* 44) deux éléments consécutifs *abc* de cette trajectoire, situés dans les couches dont les

indices sont l_n et l_{n-1}, et dont les rayons sont r_n et r_{n-1}. La loi de la réfraction donne :

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}.$$

Le triangle bcO donne

$$\frac{\sin R_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}.$$

Le produit de ces deux équations est

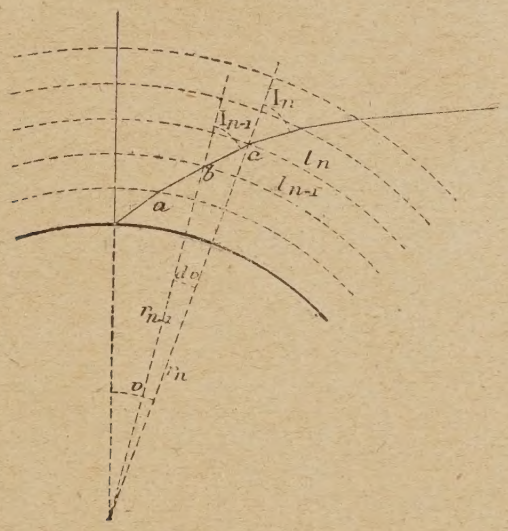
$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1} l_{n-1}}{r_n l_n}.$$

Ainsi, on a la relation générale

$$rl \sin I = \text{const.}, \tag{1}$$

identique, au facteur r près, à celle que nous avions trouvée pour

Fig. 44.



le cas de couches planes et horizontales. La valeur de cette constante est $r_1 l_1 \sin z_1$, en marquant d'un indice les éléments relatifs à la couche où se trouve l'observateur.

Désignons par φ la réfraction, c'est-à-dire l'angle compris entre les tangentes extrêmes de la trajectoire, et par $d\varphi$ l'angle de deux tangentes infiniment voisines. Rapportons enfin cette trajectoire à des coordonnées polaires r et ω, en prenant pour pôle le centre de la Terre et pour axe la verticale de l'observateur. I sera l'angle de la tangente en un point quelconque avec le rayon vecteur; par

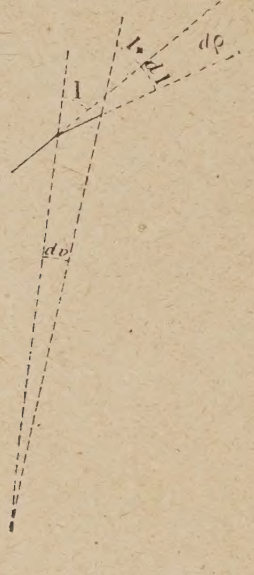
suite, on aura les relations générales :

$$d\varphi = dI + dv \qquad (fig.\ 46), \tag{2}$$

$$\frac{r\,dv}{dr} = \operatorname{tang} I. \tag{3}$$

Pour la question actuelle, il faut ajouter à ces équations la différentielle de l'équation (1), particulière aux réfractions atmosphériques. On a, en différentiant les logarithmes des deux membres,

Fig. 45.



$$\frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} + \frac{dI}{\operatorname{tang} I} = 0. \tag{4}$$

Éliminons r et φ entre (2), (3), (4), on a :

$$d\varphi = -\frac{dl}{l}\operatorname{tang} I, \tag{5}$$

ou, en mettant pour tang I sa valeur tirée de (1),

$$d\varphi = -\frac{dl}{l}\,\frac{\dfrac{r_1 l_1}{rl}\sin z_1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r_1 l_1}{rl}\sin z_1\right)^2}}. \tag{6}$$

C'est l'équation différentielle de la réfraction. Pour l'intégrer complètement entre les limites de l'atmosphère, c'est-à-dire entre $l = 1$ et $l = l_1$, il faudrait éliminer la variable r à l'aide d'une

relation entre l et r; en d'autres termes, il faudrait connaître la loi de constitution de l'atmosphère.

Mais, comme nous allons le voir, on peut cependant intégrer l'équation (6), en se limitant à certains termes, sans connaître cette loi, et en profitant de ce que r et l ne varient, dans toute l'étendue de l'atmosphère, que de quantités fort petites.

Prenons, pour simplifier, le rayon de la Terre pour unité $r_1 = 1$; nous aurons :

$$d\rho = -\frac{dl}{l^2 r}\frac{l_1 \sin z_1}{\left[1 - \frac{l_1^2}{r^2 l^2}\sin^2 z_1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{dl}{l^2 r}\frac{l_1 \sin z_1}{[\cos^2 z_1 + \alpha \sin z_1]^{\frac{1}{2}}},$$

en posant

$$\alpha = 1 - \frac{l_1^2}{l^2 r^2},$$

et enfin

$$d\rho = -\frac{dl}{l^2 r}\frac{l_1 \operatorname{tang} z_1}{[1 + \alpha \operatorname{tang}^2 z_1]^{\frac{1}{2}}},$$

dont l'intégrale, prise entre les limites $l = 1$ et $l = l_1$, c'est-à-dire de la limite de l'atmosphère jusqu'au lieu d'observation, donnera la valeur de la correction de réfraction :

$$\rho = -\int_1^{l_1} \frac{dl}{l^2 r}\frac{l_1 \operatorname{tang} z_1}{[1 + \alpha \operatorname{tang}^2 z_1]^{\frac{1}{2}}},$$

et l'intégrale n'est bien fonction que d'une seule variable, puisque entre l et r existe une relation qui est la loi de constitution de l'atmosphère.

Comme cette loi nous est inconnue, faisons un changement de variables, de façon à introduire les variations très petites de l et de r, dont nous pourrons négliger les puissances supérieures et les produits.

Posons

$$l = 1 + k,$$

k étant proportionnel à la densité d de l'air,

$$k = d\frac{(l_1 - 1)}{d_1},$$

nous savons que

$$\frac{l-1}{l_1-1}=\frac{d}{d_1};$$

posons aussi :

$$r'=\frac{1}{1-s},$$

d'où

$$s=1-\frac{1}{r}\qquad\text{et}\qquad ds=\frac{d}{r^2}\cdot$$

Nous aurons :

$$\frac{l_1}{l^2 r}=\frac{(1+k_1)(1-s)}{(1+k)^2},$$

$$\frac{l_1^2}{l^2 r^2}=\frac{(1+k_1)^2(1-s)^2}{(1+k)^2}=1-\alpha,$$

k_1 étant proportionnel à la densité de l'air au lieu d'observation.

La correction de réfraction s'écrit alors :

$$\rho=-\int_0^{k_1} dk\,(1+k_1)(1-s)(1+k)^{-2}\operatorname{tang} z_1\left[1+\alpha\operatorname{tang}^2 z_1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

avec

$$\alpha=1-(1+k_1)^2(1-s)^2(1+k)^{-2}.$$

En développant les quantités entre parenthèses et faisant les divers produits, ρ se met sous la forme :

$$\rho=A\operatorname{tang} z_1+B\operatorname{tang}^3 z_1+C\operatorname{tang}^5 z_1+\ldots,$$

où les coefficients A, B, C, ... sont des combinaisons linéaires d'intégrales de la forme $\int_0^{k_1} k^p s^q\,dk$, p et q pouvant être nuls. Le produit $(1+k_1)(1-s)(1+k)^{-2}$ et α sont, en effet, développables suivant les puissances croissantes de k et de s. Ces intégrales de la forme $\int_0^{k_1} k^p s^q\,dk$ seront de l'ordre $p+q+1$, si k et s sont considérés comme étant du premier ordre de petitesse. Or, nous savons que k reste petit. s dépend du rapport de la hauteur de l'atmosphère au rayon terrestre; cette hauteur est inconnue, mais on a pu constater que, pour des hauteurs qui sont de petites fractions du rayon terrestre, l'indice de réfraction est très voisin de l'unité, nombre qui est l'indice du vide; on peut donc admettre que pratiquement s est également petit. Si donc on

néglige les termes du 3e ordre en k et s, on aura pour valeur approchée de la correction de réfraction :

$$\rho = A_1 \operatorname{tang} z_1 + B_1 \operatorname{tang}^3 z_1,$$

où les coefficients A_1 et B_1 seront déterminés si l'on connaît les trois intégrales :

$$\int_0^{k_1} dk, \quad \int_0^{k_1} k\,dk, \quad \int_0^{k_1} s\,dk.$$

Ces intégrales s'obtiennent sans rien connaître de la constitution de l'atmosphère, ce qui n'a pas lieu pour les intégrales d'ordre supérieur, pour lesquelles il faudrait connaître la relation qui existe entre s et k.

On a immédiatement :

$$\int_0^{k_1} dk = k_1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{k_1} k\,dk = \frac{k_1^2}{2},$$

où k_1 est connu par l'observation du baromètre et du thermomètre à la station d'observation.

Reste $\int_0^{k_1} s\,dk$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_0^{k_1} s\,dk = (sk)_0^{k_1} - \int_{s_1}^{0} k\,ds,$$

le produit sk est nul aux deux limites de l'intégrale, car $s = 0$ à la surface de la Terre et $k = 0$ dans le vide.

Reste donc à évaluer $\int_{s_1}^{0} k\,ds$.

Soient p la pression atmosphérique et g l'intensité de la pesanteur en un point M de la trajectoire du rayon lumineux. D'après la théorie de l'hydrostatique, la dérivée de la pression suivant une direction est égale à la projection de la force sur cette direction. Si donc la direction du déplacement est celle de la force, c'est-à-dire, dans notre cas particulier, si le déplacement se fait suivant la verticale et sous l'action de la pesanteur, on aura :

$$\frac{dp}{dr} = -g\delta k,$$

δk étant la densité de l'air à laquelle k est proportionnel, δ étant

une constante connue. D'après la loi de l'attraction newtonienne, si g_1 est l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre, en un point de même latitude que M_1, c'est-à-dire sensiblement au point de station, on a :

$$g = \frac{g_1}{r^2};$$

d'où

$$dp = -g_1 \delta k \frac{dr}{r^2} = -g_1 \delta k \, ds,$$

puisque $\frac{dr}{r^2} = ds$, et enfin :

$$k \, ds = -\frac{1}{g_1 \delta} dp,$$

$$\int_{s_1}^{0} k \, ds = -\frac{1}{g_1 \delta} \int_{0}^{p_0} dp = -\frac{p_0}{g_0 \delta};$$

d'autre part :

$$\int_{0}^{k_1} s \, dk = +\frac{p_0}{g_0 \delta}.$$

Le thermomètre et le baromètre suffisent donc pour déterminer les coefficients de la formule de la réfraction atmosphérique, si l'on néglige les termes de 3e ordre et supérieurs. Les termes négligés n'atteignent pas $\frac{1}{8}$ de seconde sexagésimale pour $z_1 = 79^\circ$. En supposant qu'au lieu d'observation, la température soit de 0° C. la pression 0^m, 760 de mercure et le rayon de la Terre 6370^{km}, et prenant $l_1 = 1{,}000294$, pour densité du mercure 13 596 et pour poids du litre d'air 1^g, 2932, la formule donnant la correction de réfraction devient :

$$\rho = 60'', 61 \operatorname{tang} z_1 - 0'', 057 \operatorname{tang}^3 z_1.$$

Cette expression, qui représente très bien les réfractions jusqu'à 79°, commence plus loin à être en défaut, et n'a plus de sens pour $z_1 = 90^\circ$.

Les géomètres out proposé diverses lois pour le calcul de la réfraction à partir de 80° de distance zénithale. Nous donnerons comme exemple celle de Bouguer.

Admettons la loi hypothétique :

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r_1 l_1}{rl} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1}.$$

Posons

$$\left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1} \sin z_1 = y,$$

et, par suite,

$$(m-1)\frac{dl}{l} = \frac{dy}{y};$$

l'équation différentielle (page 129) deviendra :

$$(m-1)\,d\rho = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

dont l'intégrale est

$$(m-1)\rho = \text{arc cos}\, y + \text{const.}$$

En la prenant de $l = l_1$ jusqu'à $l = 1$, c'est-à-dire dans toute l'étendue de l'atmosphère, ce qui revient aux limites $y = \sin z_1$ et $y = \frac{1}{l_1^{m-1}} \sin z_1$, nous aurons :

$$(m-1)\rho = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{l_1^{m-1}} \sin z_1\right) - \text{arc}\,(\cos = \sin z_1).$$

Le dernier terme est $90^0 - z_1$. Faisons-le passer dans le premier membre et prenons les cosinus des deux membres :

$$\sin[z_1 - (m-1)\rho] = \frac{1}{l_1^{m-1}} \sin z_1.$$

Pour la mettre sous une forme plus commode, ajoutons et retranchons $\sin z_1$ aux deux membres; on aura, après quelques réductions connues :

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(m-1)\rho = \frac{l_1^{m-1}-1}{l_1^{m-1}+1}\,\text{tang}\left[z_1 - \frac{1}{2}(m-1)\rho\right].$$

En posant $l_1 = 1 + \alpha$, que l'on prenne les deux premiers termes du développement de $(1+\alpha)^{m-1}$ et que l'on remplace la tangente du petit arc $\frac{1}{2}(m-1)\,\rho$ par l'arc, il vient :

$$\rho = \alpha\,\text{tang}\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\,\rho\right);$$

α, exprimé en secondes, est $0,000294 \times 206\,265'' = 60'',64$. Quant à la constante m, on la détermine expérimentalement. Pour $z_1 = 85^0$, l'observation donne $\rho = 617'',7$. On a donc :

$$617'',7 = 60'',64\,\text{tang}\left(85^0 - \frac{m-1}{2}\,617'',7\right).$$

On en tire $\frac{m-1}{2} = 3,54$, d'où $m = 8$, 1 ou 8 en nombre rond.

Finalement, nous aurons :

$$\rho = 60'',64 \operatorname{tang}(z_1 - 3,5\rho),$$

équation facile à résoudre par tâtonnements.

Laplace a remarqué que l'hypothèse de Bouguer, dont nous venons de nous servir pour intégrer l'équation (6), donne un décroissement trop rapide de la température des couches successives; il a cherché une autre hypothèse qui reproduisît mieux la variation réelle, et se prêtât en même temps à l'intégration de (6) en termes finis. Il a obtenu ainsi :

$$\rho = 2790'',15(0,75479 - 0,49042\,T^2)\sin z_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}dt + 10021'',34\sin 2z_1,$$

dans laquelle $T = 25,962\cos z_1$. C'est une formule qu'on emploie en France. En Angleterre, Ivory, en Allemagne, Bessel, ont employé d'autres lois et ont obtenu d'autres formules pour la réfraction. Il est très remarquable que toutes ces formules, y compris celle que nous venons de développer d'après l'hypothèse de Bouguer, donnent sensiblement les mêmes valeurs pour la réfraction jusqu'à 79° ou 80° de distance zénithale. C'est seulement dans les 10 derniers degrés, de 80° à 90°, qu'elles cessent de s'accorder. Il faut conclure de cette circonstance remarquable que, jusqu'à 79°, les réfractions astronomiques sont sensiblement indépendantes de la constitution de l'atmosphère, c'est-à-dire de la loi suivant laquelle la densité varie de couche en couche, en sorte qu'il suffit, pour être en état de calculer ces réfractions, de connaître la densité ou l'indice de la dernière couche, celle où se trouve l'observateur.

On peut remarquer enfin que toutes les lois hypothétiques sur la constitution de l'atmosphère supposent que les couches d'air qui la composent sont parallèles les unes aux autres, c'est-à-dire concentriques et sphériques.

Comme toutes ces théories représentent le phénomène d'une façon satisfaisante, jusqu'à 80° environ, aussi bien dans les régions équatoriales et les contrées polaires que dans la zone tempérée,

il faut en conclure que les grands mouvements réguliers de l'atmosphère, origine de tous les phénomènes météorologiques, s'opèrent parallèlement au sol, sans troubler essentiellement la concentricité des couches aériennes.

De toutes les lois hypothétiques proposées, la meilleure paraît être celle de Laplace, qui a pris pour base un décroissement régulier de 10° du thermomètre pour chaque accroissement de 173^m dans la hauteur, nombres fournis par une mémorable ascension en ballon de Gay-Lussac. La loi imaginée par Bessel est loin de satisfaire à ces observations, regardées à juste titre comme fondamentales. Toutefois, nous savons aujourd'hui que la variation de la température ne suit pas toujours la marche régulière qu'on avait d'abord supposée. Au-dessus des aires de haute pression, par exemple, la température va d'abord en croissant avec la hauteur au lieu de diminuer. Ainsi, pendant le rude hiver de 1879-1880, lorsque le thermomètre marquait —15° à Clermont-Ferrand, il s'élevait à +3° au sommet du Puy-de-Dôme, 1100^m plus haut, au lieu de —21° qu'il aurait dû marquer d'après les anciennes idées.

On ne peut donc compter sur l'exactitude des réfractions calculées d'après une formule quelconque au delà de 79°. L'incertitude, qui va déjà à $\pm 2''$ vers 85°, atteint $30''$ ou $40''$ à l'horizon. Heureusement, la région importante pour les astronomes s'étend du zénith à 80°, et c'est celle pour laquelle la réfraction se calcule indépendamment de toute hypothèse. Au delà, les images des astres deviennent trop ondulantes pour se prêter à une observation bien exacte. En outre, la dispersion atmosphérique devient sensible ; elle transforme l'image de chaque étoile en un spectre allongé, ce qui détruit absolument la certitude du pointé.

Table des réfractions.

La Table suivante a été calculée au moyen des Tables de Radau, mais en adoptant, pour la *constante de la réfraction*, c'est-à-dire le coefficient de tang z_1 dans la formule donnée ci-dessus, la valeur $60'', 154$.

Elle donne d'abord les réfractions *normales*, c'est-à-dire les réfractions qui correspondent aux conditions normales suivantes :

Latitude, 45°;
Altitude, 0^m;
Température, 0° centigrade;
Pression atmosphérique, 760^{mm} de mercure à 0°;
Tension de la vapeur d'eau, 6^{mm}.

On y a joint une Table de corrections donnant le facteur barométrique et le facteur thermométrique par lesquels il faut multiplier la réfraction normale pour avoir les corrections qui ramènent la valeur théorique à l'état actuel de l'atmosphère.

Le facteur A a pour expression $\frac{-0,00383\,t}{1+0,00367\,t}$ et le facteur B, $\frac{H}{760}-1$, où H et t représentent la pression et la température de l'observation.

Table des réfractions normales (Connaissance des Temps).

90° − z.	Réfraction.	90° − z.	Réfraction.	90° − z.	Réfraction.
°	′ ″	°	′ ″	°	″
0.....	36.36,0	33.....	1.32,3	66.....	26,7
1.....	25.37,0	34.....	1.28,9	67.....	25,5
2.....	19. 6,6	35.....	1.25,6	68.....	24,3
3.....	14.58,8	36.....	1.22,6	69.....	23,1
4.....	12.11,8	37.....	1.19,6	70.....	21,9
5.....	10.13,5	38.....	1.16,8	71.....	20,7
6.....	8.46,1	39.....	1.14,1	72.....	19,5
7.....	7.39,3	40.....	1.11,5	73.....	18,4
8.....	6.46,8	41.....	1. 9,0	74.....	17,2
9.....	6. 4,5	42.....	1. 6,7	75.....	16,1
10.....	5.29,8	43.....	1. 4,4	76.....	15,0
11.....	5. 0,8	44.....	1. 2,2	77.....	13,9
12.....	4.36,3	45.....	1. 0,0	78.....	12,8
13.....	4.15,2	46.....	0.58,0	79.....	11,7
14.....	3.57,0	47.....	56,0	80.....	10,6
15.....	3.41,0	48.....	54,1	81.....	9,5
16.....	3.26,9	49.....	52,2	82.....	8,5
17.....	3.14,3	50.....	50,4	83.....	7,4
18.....	3. 3,1	51.....	48,6	84.....	6,3
19.....	2.53,0	52.....	46,9	85.....	5,2
20.....	2.43,8	53.....	45,2	86.....	4,2
21.....	2.35,4	54.....	43,6	87.....	3,1
22.....	2,27,8	55.....	42,1	88.....	2,1
23.....	2.20,7	56.....	40,5	89.....	1,0
24.....	2.14,3	57.....	39,0	90.....	0,0
25.....	2. 8,2	58.....	37,5		
26.....	2. 2,7	59.....	36,1		
27.....	1.57,5	60.....	34,7		
28.....	1.52,6	61.....	33,3		
29.....	1.48,0	62.....	31,9		
30.....	1.43,8	63.....	30,6		
31.....	1.39,7	64.....	29,3		
32.....	1.35,9	65.....	28,0		

Table des corrections.

Température (Facteur A):

Thermomètre centigrade.	Facteur.	Thermomètre centigrade.	Facteur.
o		o	
—10...	+0,040	+15...	—0,054
— 9...	0,036	+16...	0,058
— 8...	0,032	+17...	0,061
— 7...	0,027	+18...	0,065
— 6...	0,023	+19...	0,068
— 5...	0,019	+20...	0,071
— 4...	0,015	+21...	0,075
— 3...	0,012	+22...	0,078
— 2...	0,008	+23...	0,081
— 1...	0,004	+24...	0,084
0...	0,000	+25...	0,088
+ 1...	—0,004	+26...	0,091
+ 2...	—0,008	+27...	0,094
+ 3...	—0,011	+28...	0,097
+ 4...	—0,015	+29...	0,100
+ 5...	—0,019	+30...	0,103
+ 6...	—0,022	+31...	0,107
+ 7...	—0,026	+32...	0,110
+ 8...	—0,030	+33...	0,113
+ 9...	—0,033	+34...	0,116
+10...	—0,037	+35...	0,119
+11...	—0,040	+36...	0,122
+12...	—0,044	+37...	0,125
+13...	—0,048	+38...	0,128
+14...	—0,051	+39...	0,131
+15...	—0,054	+40...	—0,134

Correction des réfractions normales

(Facteur B).

Baromètre.	Facteur.	Baromètre.	Facteur.
mm		mm	
720...	—0,053	746...	0,018
721...	0,051	747...	0,017
722...	0,050	748...	0,016
723...	0,049	749...	0,015
724...	0,047	750...	—0,013
725...	—0,046	751...	0,012
726...	0,045	752...	0,011
727...	0,043	753...	0,009
728...	0,042	754...	0,008
729...	0,041	755...	—0,007
730...	—0,040	756...	0,005
731...	0,038	757...	0,004
732...	0,037	758...	0,003
733...	0,036	759...	0,001
734...	0,034	760...	0,000
735...	—0,033	761...	+0,001
736...	0,032	762...	0,003
737...	0,030	763...	0,004
738...	0,029	764...	0,005
739...	0,028	765...	+0,007
740...	—0,026	766...	0,008
741...	0,025	767...	0,009
742...	0,024	768...	0,011
743...	0,022	769...	0,012
744...	0,021	770...	+0,013
745...	—0,020		

Voici un exemple de ce genre de calcul. *On a observé une étoile par* $66^{\circ}\,32'\,22'',4$ *de hauteur apparente; le baromètre (réduit à* 0°*) marquait* 756^{mm} *et le thermomètre extérieur* $+\,12^{\circ},6$: *on demande la hauteur vraie.*

La Table donne pour 66°.....	26″,7
Variation pour 32′,4.....	— 0,6
Réfraction tabulaire.....	26″,1
Facteur barométrique B.....	— 0,005
Facteur thermométrique A.....	— 0,046
Produit.....	0,051

$$26'', 1 \times 0,05 = 1'', 3$$

Hauteur apparente.....	66°.32′.22″,4
Réfraction.....	— 24″,8
Hauteur vraie.....	66°.31′.57″,6

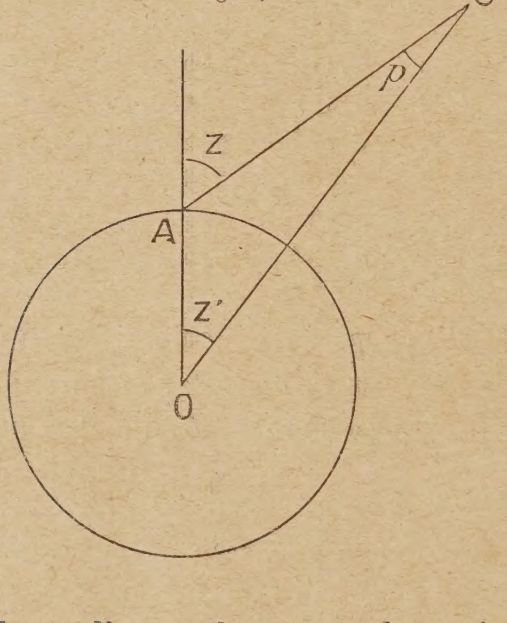
On ne tient nul compte de l'état hygrométrique, quoique la vapeur d'eau ait un indice un peu plus fort que celui de l'air qu'elle remplace; mais, comme sa densité est moindre, il se trouve qu'il y a compensation.

Nous verrons plus loin, en traitant de la détermination des latitudes, par les travaux exécutés dans les grands Observatoires, comment on peut déterminer à la fois, au moyen des observations, la latitude et les coefficients de la formule de réfraction.

Correction de parallaxe.

Toutes les mesures de distances zénithales d'étoiles ou de planètes doivent donc être corrigées de l'effet de la réfraction, et cet

Fig. 45 *bis*



effet étant de relever l'astre dans son plan azimutal, la distance zénithale observée sera toujours trop faible, de sorte que la correction de réfraction est toujours positive.

Mais, quand on observe les distances zénithales d'astres que l'on

ne peut considérer comme étant à une distance telle que le lieu d'observation se confonde avec le centre de la Terre, il y a lieu de leur apporter une dernière correction.

On voit immédiatement sur la figure 45 *bis* que la distance zénithale observée z diffère de la distance zénithale vraie, évaluée du centre z', du petit angle p, en S, c'est-à-dire de l'angle sous lequel on voit, du centre de l'astre, le rayon de la Terre. Cet angle porte le nom de *parallaxe de hauteur*. On en calcule aisément la valeur :

$$\frac{\sin p}{\sin z} = \frac{R}{D}, \qquad p'' = \frac{R}{D \sin 1''} \sin z,$$

R désignant le rayon terrestre, D la distance du centre de la Terre à l'astre. La correction de parallaxe est donc proportionnelle au sinus de la distance zénithale observée. Quand l'astre est à l'horizon, $z = 90^\circ$, et l'on a : $p_0 = \frac{R}{D \sin 1''}$, p_0 est la parallaxe horizontale, d'où $p = p_0 \sin z$.

Nous verrons, en traitant de l'Astronomie, comment se déterminent les parallaxes horizontales du Soleil et des planètes.

LIVRE DEUXIÈME.

GRANDS OBSERVATOIRES ASTRONOMIQUES.

La détermination de l'heure, base de celle des différences de longitudes, et la détermination des latitudes, exigent que l'on connaisse d'avance avec une très grande précision les coordonnées uranographiques des étoiles. L'amélioration continuelle des valeurs de ces coordonnées $\mathcal{A}$ et δ est l'œuvre quotidienne des grands observatoires, dont nous allons décrire l'organisation et les travaux.

Cette organisation est fondée sur les deux relations suivantes. Si l'on observe une étoile au moment de son passage au méridien, la formule

$$H = \mathcal{M} + \mathcal{A}$$

se réduit à

$$H = \mathcal{A}.$$

En d'autres termes, l'heure sidérale de ce passage fait connaître l'ascension droite de cette étoile. En second lieu, la relation

$$\delta = \lambda + z_m$$

montre que, pour obtenir la seconde coordonnée uranographique, il suffit d'ajouter à la colatitude du lieu la distance zénithale méridienne de l'étoile.

Ces deux observations étant indépendantes l'une de l'autre, on les sépare entièrement et l'on y consacre deux instruments différents, tous deux employés à observer dans le méridien, l'un la lunette méridienne pour les $\mathcal{A}$, l'autre le cercle mural ou le cercle méridien pour les δ. Cette application du principe de la division du travail, si prôné dans l'industrie, permet d'étudier chaque instrument

d'une manière plus approfondie et de fixer l'attention de l'observateur sur le phénomène réduit à sa plus extrême simplicité. En outre, les instruments d'un observatoire ne devant pas être déplacés, on peut leur donner des dimensions bien plus considérables qu'aux instruments transportables d'un géographe ou d'un géodésien.

Les appareils nécessaires à un observatoire sont au nombre de trois : la pendule sidérale, la lunette méridienne et le cercle mural ou le cercle méridien. Il suffit d'y ajouter un baromètre et un thermomètre pour les corrections dues à la réfraction.

Ces instruments sont supportés par des piliers en pierre de taille, à fondations profondes, et abrités par une salle dont les parois permettent à l'air intérieur de se mettre rapidement en équilibre de température avec l'air extérieur. Le plancher de cette salle doit être coupé autour de chaque pilier, afin que ses vibrations ne se communiquent pas aux instruments. Enfin la salle s'ouvre au-dessus de chaque instrument par une large tranchée pratiquée dans les murs et le plafond, de manière à laisser voir le ciel dans la direction du méridien. Cette tranchée se ferme, au plafond, par des trappes mobiles, et sur les murs par de longues fenêtres.

Chaque instrument a son observateur; l'un détermine les $\mathcal{R}$ à la lunette méridienne à l'aide de la pendule sidérale, l'autre les δ au cercle mural ou au cercle méridien.

Ce système d'observations exclusivement méridiennes ne date pas de très loin. Il a été introduit en Astronomie par Rœmer, de l'Académie des Sciences, à qui l'on doit la découverte et la mesure de la vitesse de la lumière. Il a été adopté par le célèbre astronome Bradley vers le milieu du siècle dernier et introduit, quelques années après, à l'Observatoire de Paris par le dernier Cassini. Mais ce monument n'avait pas été construit en vue d'observations de ce genre. Il a fallu y ajouter une salle accessoire qui est devenue bientôt la partie principale de l'établissement.

Nous allons décrire successivement et en détail ces instruments indispensables, en y ajoutant des indications plus sommaires sur les autres instruments que l'on utilise également. Nous résumerons enfin l'organisation d'ensemble des travaux dans un grand observatoire.

CHAPITRE VI.

INSTRUMENTS ET TRAVAUX D'UN OBSERVATOIRE.

Pendule astronomique.

Les horloges sont devenues des instruments de précision, grâce à l'introduction du pendule comme régulateur. Cette invention capitale est due à Huyghens, de l'Académie des Sciences. On y distingue le rouage avec le poids moteur, l'échappement qui met en communication le rouage avec le balancier régulateur, enfin un petit appareil destiné à permettre de remonter la pendule sans interrompre sa marche. En réalité, le rouage se réduirait à un simple compteur chargé d'enregistrer les oscillations isochrones du balancier, s'il n'avait en outre la fonction d'entretenir lesdites oscillations.

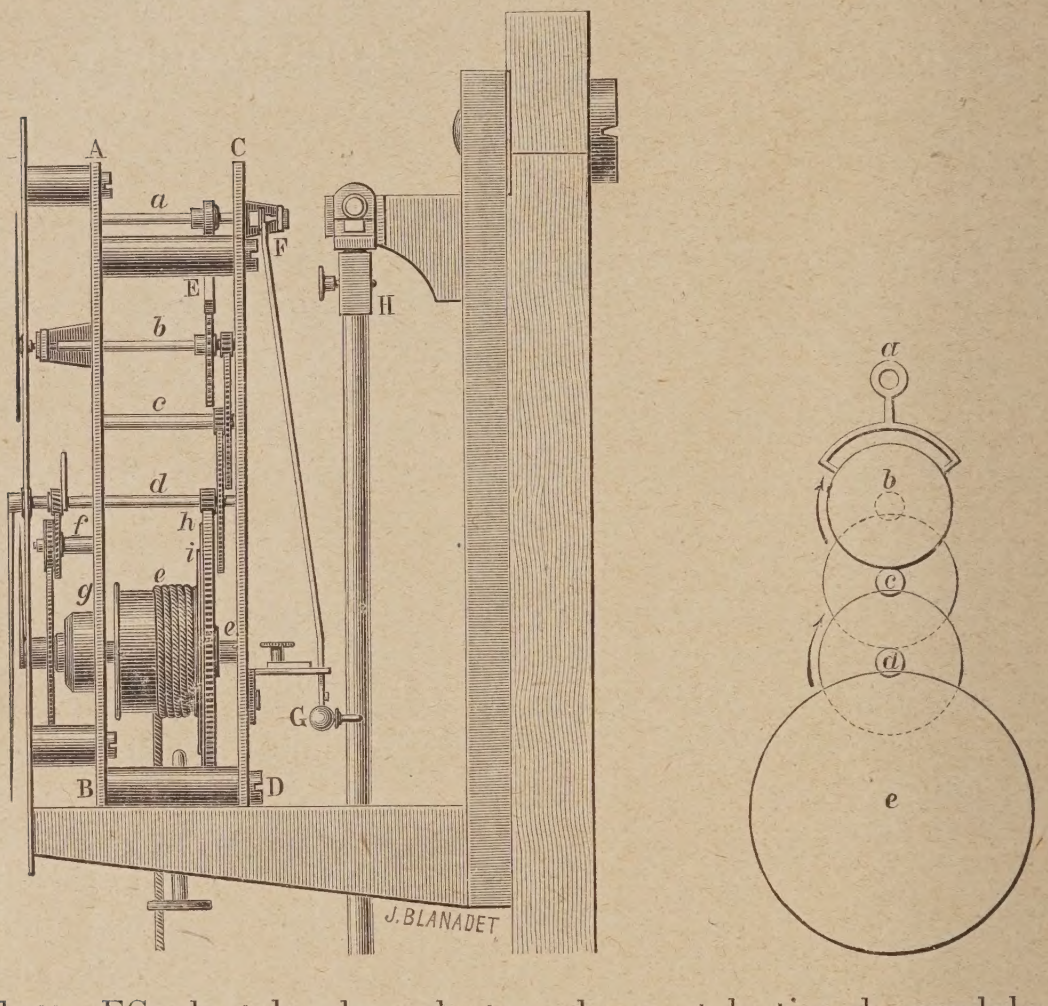
Rouage. — Le rouage est compris entre deux plaques métalliques AB, CD; *e* est le tambour sur lequel s'enroule la corde qui soutient le poids moteur. Ce tambour porte une roue dentée qui engrène avec le pignon de l'axe des minutes *d*. A l'une des extrémités de cet axe est fixée l'aiguille des minutes; il porte en outre une roue dentée de 96 dents, qui agit par un second pignon de 12 dents placé sur l'axe intermédiaire C. Celui-ci porte une roue dentée de 90 dents qui agit sur le pignon de 12 dents de l'axe des secondes *b*. Par cette disposition, l'axe des minutes tourne dans le même sens et 60 fois plus lentement que celui des secondes, car le rapport de leurs vitesses est

$$\frac{90 \times 96}{12 \times 12} = 60.$$

L'axe des secondes *b* porte la roue d'échappement armée de

30 dents, laquelle est arrêtée, à chaque oscillation du balancier régulateur placé en arrière, par le moyen d'une ancre fixée à l'arbre *a*. Celle-ci est reliée au balancier au moyen de la four-

Fig. 46.



chette FG, dont les deux dents embrassent la tige du pendule. Ce dernier est suspendu par un ressort au pilier qui soutient la cage de l'horloge.

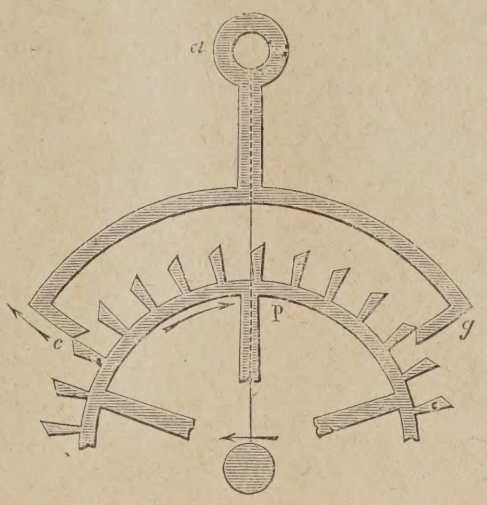
Échappement à ancre dépendant et à repos. — (On trouvera la théorie mathématique de cet échappement dans le troisième Volume du *Cours de Mécanique* de H. Résal.)

Supposons d'abord que les palettes *c* et *g* d'une ancre oscillant autour de l'axe *a* (placé sur le prolongement de l'axe de rotation du balancier) comprennent un nombre entier de dents de la roue d'échappement. La figure 51 représente l'instant où le pendule passe par la verticale pour remonter vers la gauche. La roue

d'échappement, sollicitée par le poids moteur, tend à tourner dans le sens de la flèche F.

A ce moment, la palette C va dégager la dent qui bute contre elle; mais la palette *g*, venant à s'abaisser, arrête aussitôt une dent

Fig. 47.



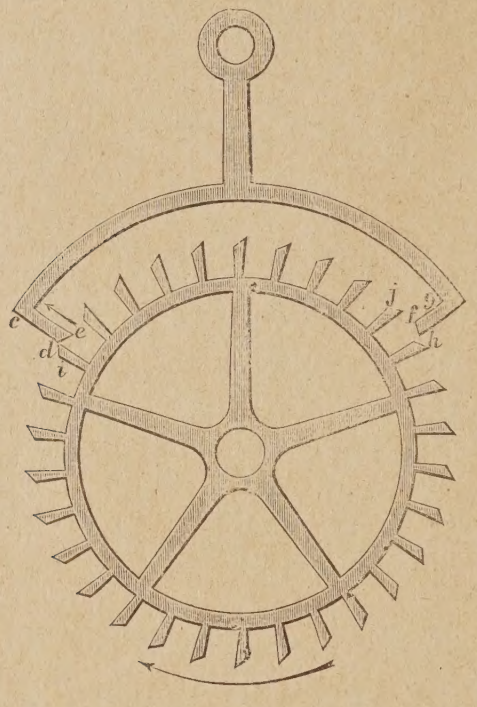
de la roue. On voit que de cette façon la roue d'échappement ne pourrait marcher, dans quelque sens qu'oscille le balancier. Les palettes *c* et *g* seront toujours en prise, soit à gauche, soit à droite, avec une dent et, si on leur donne un profil circulaire ayant le point *a* pour centre, la dent de gauche glissera sur la surface convexe de la palette de gauche sans avancer ni reculer; il en sera de même pour la dent de droite, qui bute à son tour sur la surface concave de la palette de droite.

Les choses se passeront autrement si les palettes de l'ancre comprennent un nombre entier de dents plus un demi-intervalle de dents, comme dans la figure 48. Au moment où la dent *i* cesse d'être en prise avec la palette *cd*, la roue d'échappement deviendra libre et se mettra à tourner d'un demi-intervalle de dents, jusqu'à ce que la dent *j* vienne buter contre la face interne *gf* de la palette de droite, qui s'est enfoncée entre les dents. Le même effet se reproduira en sens inverse à l'oscillation suivante lorsque le balancier, repassant par la verticale, remontera vers la droite, et ainsi de suite.

Ces frottements et la résistance de l'air détruiraient bien vite le mouvement oscillatoire du balancier. Pour lui restituer l'impulsion nécessaire et entretenir ses oscillations au moyen de l'action du

poids moteur, on termine les palettes de l'ancre par de petits plans inclinés *de*, *fh*, sur lesquels glissent, en les poussant, les dents de la roue d'échappement. L'épaisseur des palettes, et par suite la longueur de ces deux petites faces *de*, *fh*, doit être un peu moindre qu'un demi-intervalle de dents. De la sorte, la roue d'échappement, qui commence à se mouvoir dès que la dent *i* glisse sur la levée *de*, n'est complètement libre qu'un très court instant, au bout duquel elle vient frapper, avec un bruit sec, sur la palette *gh*. C'est pourquoi cet échappement est appelé *dépendant* (sous-entendu du rouage). Il est aussi dit *à repos*, parce que la roue

Fig. 48.



d'échappement reste immobile tout le temps que la dent *i* glisse sur la palette *cd* ou que la dent *j* glisse sur la palette *cf*.

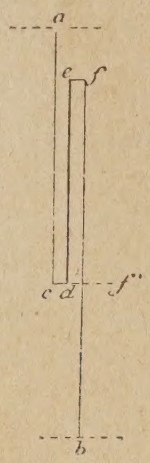
Puisqu'à chaque oscillation du balancier, il ne passe entre les pattes de l'ancre qu'un demi-intervalle de dents, on donne 30 dents et non 60 à la roue d'échappement dont l'axe porte l'aiguille des secondes.

Malgré ce moyen d'entretenir l'oscillation du balancier, celle-ci varie d'amplitude avec le temps, à cause de l'épaississement des huiles des pivots de tous les axes. Mais l'isochronisme des oscillations n'en est pas sensiblement altéré, pourvu que leur amplitude

ne dépasse pas certaines limites. Si elle venait à se réduire beaucoup, on augmenterait un peu le poids moteur.

La tige du balancier doit être compensée pour les variations de température. Nous en rappellerons seulement le principe. La tige

Fig. 49.



coudée *acdefb*, d'un seul métal (acier), se dilate comme une tige de longueur *ab*, parce que la dilatation en sens inverse de la tige montante *de* compense celle de *ff'*. Mais, si l'on fait *de* en un métal trois fois plus dilatable (zinc), il suffit que *de* soit la moitié de *ab* pour que *ab* reste invariable à toute température [1].

Pour battre 86 400^{s} par jour sidéral, le balancier doit avoir une longueur déterminée. Afin de lui donner cette longueur sans interrompre la marche, on agit sur le ressort de suspension à l'aide d'une vis qui le fait remonter ou redescendre un peu entre les mâchoires qui le serrent, jusqu'à ce que la longueur voulue soit atteinte.

Pour mettre la pendule à l'heure, en supposant qu'elle s'en soit écartée d'un certain nombre de minutes, on agit sur l'aiguille des minutes, fixée par un manchon à frottement doux sur l'axe des minutes; mais on ne doit jamais toucher à l'aiguille des secondes.

Les pendules astronomiques marchent un mois sans avoir besoin d'être remontées. Il faudrait, dans la figure précédente, pour éviter l'obligation de donner à la descente du poids moteur une trop grande excursion, placer un axe intermédiaire avec pignon et roue

---

[1] La dilatation de l'acier pour 1° d'augmentation de température est d'à peu près 0,000011 de la longueur totale; celle du zinc est sensiblement 0,000033.

dentée entre l'arbre des minutes et l'arbre du tambour, afin de ralentir la vitesse de ce dernier.

Remontoir. — Soient *a* la circonférence du tambour sur lequel s'enroule la corde du poids moteur, et *b* celle d'une roue à rochet fixée au tambour, tandis que la roue motrice est libre; pour entraîner celle-ci dans le sens de la flèche, il suffit de la relier à la roue à rochet par un doigt *f* fixé à cette même roue motrice (*fig.* 50). On peut alors remonter le poids en faisant tourner le tambour en

Fig. 50.

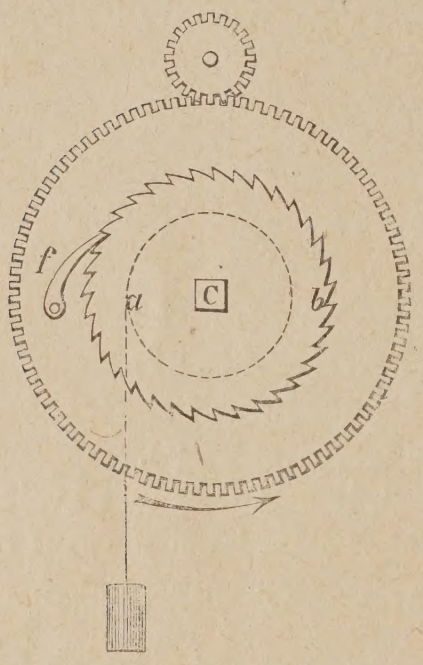
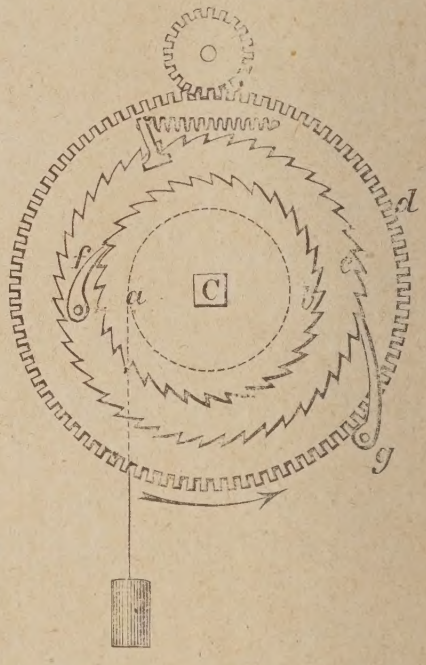


Fig. 51.



sens inverse à l'aide d'une clef engagée dans le carré C, sans agir en aucune façon sur la roue motrice *d*, car alors le doigt *f* sautera par-dessus les dents du rochet, qui ne la retiendront plus. Mais, pendant ce temps, le rouage resterait immobile. Pour lui communiquer, pendant le temps du remontage, l'équivalent de la force motrice du tambour et de son poids, on fixe le doigt *f* sur une seconde roue à rochet (*fig.* 51), libre autour de l'axe du tambour, mais attachée par un ressort à la roue motrice et retenue, pendant le remontage, par un doigt *g* fixé à l'une des platines qui forment la cage du rouage. Pendant la marche, cette seconde roue à rochet est entraînée par la première; son ressort se tend jusqu'à ce que la tension dépasse la résistance du rouage; alors elle entraîne la

roue *d*; mais, dans le remontage, cette seconde roue à rochet est débarrassée de la première et arrêtée aussitôt par le doigt *g*. Elle agit donc sur la roue motrice *d* par le moyen de son ressort, dont la tension, une fois établie, suffit à faire marcher quelques instants le rouage [1].

Minuterie.

Sur le plan d'une horloge donné plus haut, l'aiguille des heures est séparée de celle des minutes. La disposition ordinaire consiste à rassembler ces deux aiguilles et à les faire tourner autour d'un même axe, mais avec des vitesses différentes, à l'aide de manchons emboîtés et d'un petit système de roues et de pignons distinct du système général.

L'arbre des minutes *ab* s'engage à frottement dans un manchon qui porte à son extrémité une longue aiguille, celle des minutes. Ce manchon porte lui-même un second manchon qui peut tourner autour du premier presque sans frottement. Le second porte l'aiguille des heures. Comme celle-ci doit tourner autour de l'axe commun avec une vitesse douze fois moindre que celle des minutes, on obtient ce mouvement à l'aide d'un rouage particulier dont voici la description. A la base du premier manchon intérieur, on place un pignon conduisant une roue dentée, fixée elle-même à l'axe de renvoi *dd* (*fig.* 52). Sur cet axe se trouve un autre pignon qui conduit une deuxième roue placée à la base du manchon entièrement mobile qui porte l'aiguille des heures. Si les pignons ont, l'un trois fois moins, et l'autre quatre fois moins de dents que leurs roues correspondantes, le manchon extérieur sera entraîné par le manchon intérieur avec une vitesse douze fois moindre.

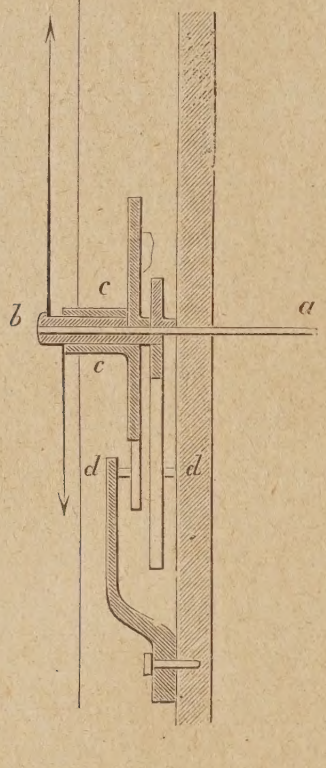
La pendule sidérale doit battre 86 400^s en un jour sidéral, c'est-à-dire entre deux passages consécutifs d'une même étoile au méridien. Il faut, de plus, qu'elle marque $0^h\,0^m\,0^s$ à l'instant du passage du point vernal γ au méridien ou, ce qui revient au même, qu'elle marque l'heure $\mathcal{R}$ lorsqu'une étoile quelconque, dont l'ascension droite est $\mathcal{R}$, passe au méridien. Ces deux conditions

---

[1] Ce ressort supplémentaire a en réalité, dans les horloges, une forme très différente de celle qui a été adoptée, pour plus de clarté, dans la figure 51.

ne pouvant être rigoureusement remplies, il y a lieu d'appliquer deux corrections distinctes à l'heure h donnée par la pendule pour obtenir la vraie heure sidérale H. Supposons qu'à une certaine date t, on ait trouvé que l'horloge est en retard de C_{p_0}, et qu'elle bat $86400^s - m^s$ par jour; m sera son retard diurne et C_{p_0} son

Fig. 52.



retard absolu à la date t. Celui-ci ira en augmentant avec le temps, proportionnellement à la marche. A une autre date t', on aura :

$$C_p = C_{p_0} + (t' - t)m,$$

$t' - t$ étant exprimé en jours et fractions décimales du jour. Il suffira donc, pour avoir l'heure exacte à une date quelconque t', d'ajouter la correction C_p à l'heure indiquée par la pendule.

Cette correction suppose que le pendule est exactement compensé pour les variations de température. S'il en était autrement, C_p serait une fonction de cette température, ou plutôt des variations de celle-ci dans l'intervalle $t' - t$. Il y a plus encore.

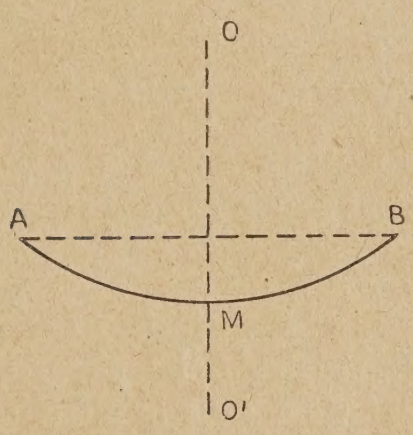
Elle suppose en outre que la pression atmosphérique est restée constante. Le pendule oscillant dans un air plus ou moins dense ne marche pas comme dans le vide. La résistance de l'air et la perte

de poids de la lentille plongée dans ce fluide influent quelque peu sur la durée des oscillations. Si la densité de l'air vient à varier, et elle varie effectivement avec la pression barométrique, la marche m subit de petites variations dont il est très difficile de tenir compte. Pour éliminer ces diverses influences, on a été conduit à soustraire absolument l'horloge régulatrice d'un observatoire aux variations de température et de pression. Il faut pour cela la placer sous une cloche hermétiquement fermée dans la couche de température invariable que l'on rencontre dans le sol à une certaine profondeur. A Paris, cette profondeur est de 27^{m}. C'est aussi celle des caves, dont la température, d'environ 11^{o}, reste absolument constante. On compare de temps en temps les autres horloges de l'Observatoire à celle-là pour en déterminer exactement la marche.

Lunette méridienne.

Cette lunette tourne autour d'un axe horizontal qui est porté lui-même par des coussinets solidement fixés à deux grands piliers en pierre de taille, de façon à donner à l'instrument toute la stabilité possible. La lunette elle-même est très solidement établie. Le corps de la lunette est constitué par deux troncs de cône

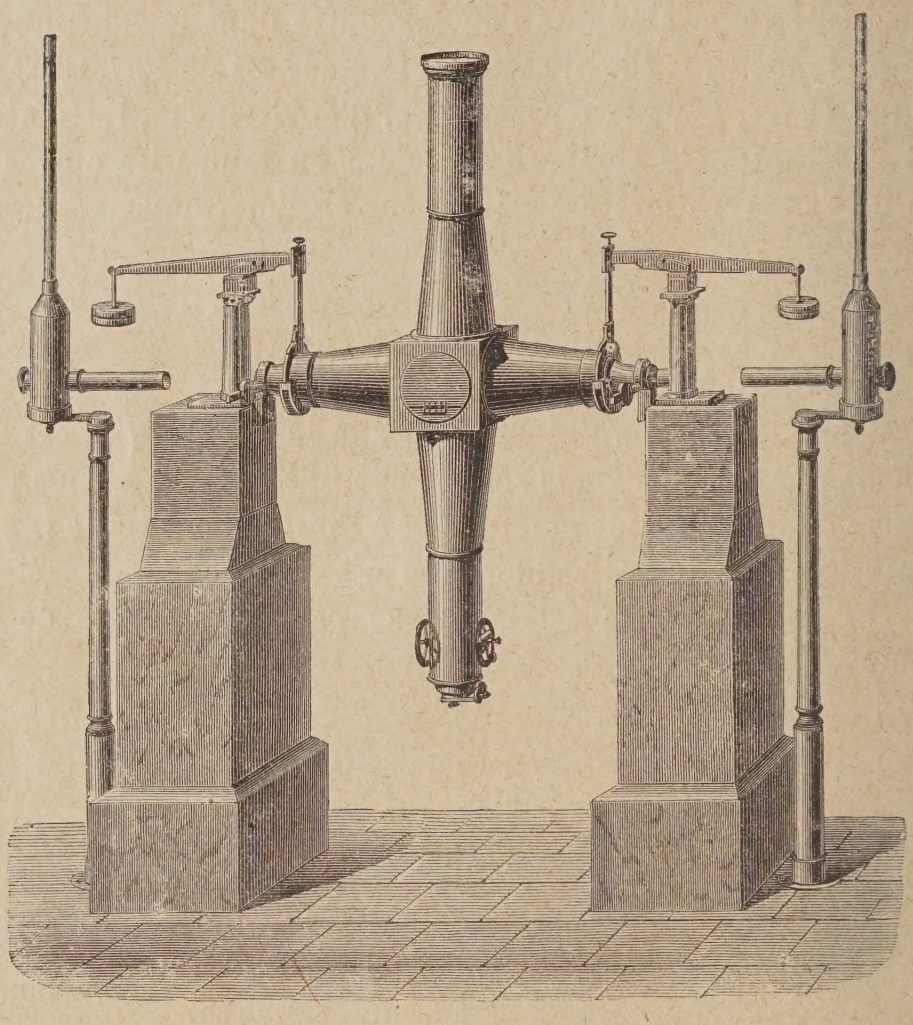
Fig. 53.



assemblés sur les deux faces opposées d'un cube, dont les deux autres faces servent de base aux tourillons. L'un des troncs de cône porte à son extrémité l'objectif, l'autre l'oculaire. On donne à l'instrument une symétrie aussi parfaite que possible, de façon

à réduire au minimum les causes d'erreurs dues à la flexion. En effet, l'axe AB des tourillons prend sous l'action du poids de la lunette la forme AMB. Si tout l'appareil est symétrique, cette courbe sera elle-même symétrique, et malgré la flexion, l'axe optique de la lunette restera toujours dans le plan de symétrie, et par conséquent perpendiculaire à l'axe de rotation, s'il y a été

Fig. 54.



placé par un réglage préalable. Le plan vertical décrit par la ligne de visée doit coïncider avec le méridien. Au-dessous de la lunette, entre les deux piliers, se trouve une sorte de canapé mobile sur lequel l'observateur se couche ou s'assied quand il observe des astres à une assez grande hauteur. La pendule sidérale, portée par un pilier séparé, est placée à côté de la lunette méridienne, de telle sorte qu'à tout moment l'observateur puisse

voir le cadran et entendre distinctement les battements de la pendule.

Le réticule de la lunette porte un double fil parallèle à l'axe de rotation et un autre fil perpendiculaire à cet axe. Si l'instrument est bien rectifié, ce second fil se projette sur le méridien céleste dans toutes les positions de la lunette.

Le réticule peut aussi comporter un fil mobile, mû par une vis micrométrique et dont les déplacements sont évalués à l'aide d'un tambour gradué porté par la vis.

L'observation du passage d'un astre au méridien est fort simple. A l'aide d'un très petit cercle adapté, en guise d'oreille, à la lunette (on le voit près de l'oculaire sur la figure 54) et d'un niveau, on amène la lunette à la hauteur où l'astre que l'on doit observer va passer au méridien. On le voit bientôt entrer dans le champ de la lunette et le traverser avec une certaine vitesse, en vertu du mouvement diurne. L'observateur compte les secondes de la pendule et note l'instant h où l'image de l'étoile a passé au fil méridien. Si la correction C_p de la pendule et sa marche m ont été déterminées, on aura

$$H = t + C_{p_0} + m\,(t' - t_0),$$

C_{p_0} était la correction de pendule à l'heure lue t_0. Remarquez que ce genre d'observation est indépendant de la réfraction. Celle-ci ne fait jamais sortir une étoile du vertical où elle se trouve réellement à un moment donné. Le plan méridien étant lui-même un plan vertical, lorsqu'une étoile paraît s'y trouver, c'est qu'elle s'y trouve réellement. Partout ailleurs, la coordonnée A serait altérée par la réfraction.

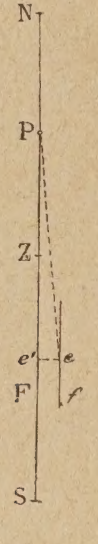
On s'attache à maintenir l'étoile entre les deux fils horizontaux, distants de 10″ à 15″ seulement, afin d'observer toujours le passage au même point du fil méridien. Lorsqu'il s'agit d'une étoile voisine de l'équateur, la petite ligne qu'elle parcourt dans le champ de la lunette est sensiblement rectiligne, et l'étoile, une fois amenée entre les deux fils horizontaux, y reste jusqu'au bout. Si elle est très voisine du pôle, la courbure de la trajectoire devient sensible, et il faut peu à peu agir sur la lunette afin de maintenir cette étoile entre les deux fils.

Pour obtenir plus de précision, on place dans le réticule un certain nombre de fils équidistants parallèles à celui du milieu; on

observe le passage de l'étoile à chacun d'eux et l'on réduit les observations faites aux différents fils à ce qu'elles auraient été si elles avaient été faites au fil du milieu, puis l'on prend la moyenne des résultats.

Soient (*fig.* 55) :

Fig. 55.



NPZ le méridien céleste projeté sur le plan de l'horizon;
F le fil méridien;
f un fil situé à la distance angulaire *ee'*;
e une étoile passant en *e* et *e'* sous ces fils.

Le temps nécessaire pour aller d'un fil à l'autre sera mesuré par l'angle horaire *e* P *e'*. Le triangle rectangle *e* P *e'* donnera

$$\sin P = \frac{\sin ee'}{\sin \delta}.$$

Voici deux exemples de ce genre d'observation :

	Polaire.	α Vierge.
	h m s	h m s
1er fil.....	0.48.42,0	13.18. 5,1
2e fil.....	1. 1. 1,0	13.18.22,5
3e fil.....	1.13.20,0	13.18.40,2
4e fil.....	1.25.41,5	13.18.57,8
5e fil.....	1.38. 0,2	13.19.15,2
Moyenne.....	1.13.21,0	13.18.40,16

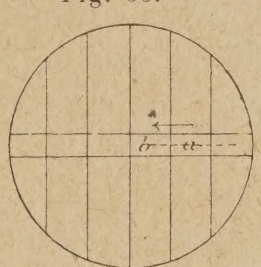
Observation du passage d'un astre aux fils de la lunette.

La précision de l'observation du passage d'un astre au méridien réside tout entière dans l'appréciation exacte de l'instant indiqué par la pendule au moment où l'étoile passe à chaque fil micromètre de la lunette méridienne.

On a employé et l'on emploie pour cela diverses méthodes : celle de l'*œil* et de l'*oreille*, qui est la plus ancienne et se trouve encore en usage chez bien des astronomes ; celle de l'*enregistrement électrique ;* enfin celle du *micromètre impersonnel*, aujourd'hui la plus acceptée et qui donne le maximum de précision.

Dans la première méthode, l'observateur suit, à l'œil, l'image de l'étoile dans la lunette et compte, en même temps, à l'oreille, les battements de la pendule. Il subdivise mentalement les intervalles entre les secondes rondes et, avec un peu d'habitude, arrive à apprécier le dixième de seconde. Pour acquérir cette habitude, il faut suivre le mouvement de l'étoile et en remarquer les positions successives à chaque battement de la pendule. Puis, étant ainsi préparé et continuant à compter les secondes, on tâche d'estimer la manière dont le fil bissecte l'intervalle constant *ab* (*fig.* 56) compris entre le battement qui pré-

Fig. 56.



cède le passage au fil et le battement suivant. D'autres y procèdent instinctivement, sans chercher à s'en rendre compte. Quel que soit le moyen, il faut plusieurs mois d'exercice avant d'être en état d'atteindre couramment la précision requise.

Cette méthode qui exige une attention continue et un accord entre deux observations, celle donnée par l'œil et celle donnée par l'oreille, est assez fatigante. L'enregistrement électrique

supprime l'intervention de l'ouïe, entraîne ainsi moins de fatigue pour l'observateur et permet d'observer la même étoile à un plus grand nombre de fils.

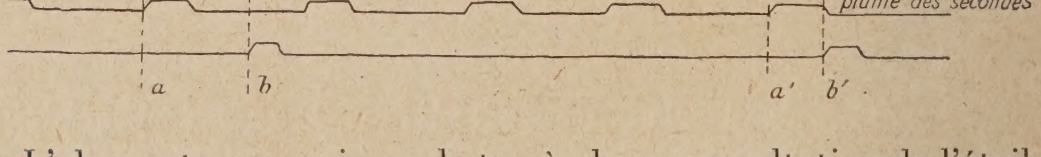
L'enregistrement électrique des observations et du temps se fait au moyen du *chronographe*, analogue dans son ensemble à un appareil de télégraphe Morse. Imaginons une bande de papier prise entre deux cylindres et se déroulant d'un mouvement uniforme. Au-dessus de cette bande et à la même hauteur viennent s'appuyer deux plumes portées par des leviers commandés chacun par la palette d'un électro-aimant.

Lorsque les palettes sont en repos, les plumes décrivent des lignes droites parallèles; mais, si un courant électrique vient à passer dans un des électro-aimants, la palette est attirée, la plume l'est aussi et ne revient à sa position initiale que lorsque le courant a cessé d'agir, après avoir tracé sur la bande une petite coche en forme de trapèze.

Si l'action du courant se produit à des intervalles réguliers, la ligne décrite par cette plume portera, à des distances égales, des coches semblables.

Il nous suffit dès lors d'imaginer que l'électro-aimant qui commande l'une des plumes soit intercalé dans un circuit que l'opérateur peut fermer à volonté en pressant sur un bouton ou *top*, et que l'électro-aimant qui commande l'autre plume soit intercalé dans le circuit d'une seconde pile, dont le courant est ouvert, puis fermé à chaque oscillation du balancier de la pendule, de façon à enregistrer graphiquement les secondes de cette dernière (*fig.* 57).

Fig. 57.



L'observateur appuie sur le top à chaque occultation de l'étoile par un fil. Il suffit alors de relever l'origine de la coche du top par rapport aux origines des coches des secondes qui l'encadrent.

On a beaucoup amélioré cette méthode par l'emploi de ce que l'on a appelé le micromètre impersonnel. Ici l'enregistrement

des observations se fait automatiquement. Imaginons tout d'abord que l'observateur maintienne constamment sur l'étoile le fil mobile d'un oculaire à micromètre analogue à celui que nous avons décrit (p. 89), mais dont le tambour en ébonite porte un certain nombre de touches métalliques dont la position est repérée et qui viendront par leur contact fermer le circuit d'une pile. Quand le fil mobile arrive à l'une des positions du tambour correspondant à une touche, le circuit se ferme, et l'instant correspondant se marque sur la bande de papier. On peut même supprimer entièrement l'action de l'opérateur en faisant commander le mouvement du fil mobile par un cône de friction mû électriquement, dont on peut régler la position de façon que le fil mobile suive automatiquement l'étoile. L'opérateur n'a plus alors qu'à régler la position du cône de friction avant l'entrée de l'étoile dans les fils, et à surveiller ensuite la régularité du mouvement.

Le degré de précision avec lequel on parvient à observer le passage d'une étoile à un fil dépend évidemment de la vitesse de son mouvement angulaire dans le champ de la lunette. Cette vitesse, de 15″ par seconde de temps pour une étoile équatoriale, se réduit à 15″ sin δ pour une étoile située à la distance δ du pôle. Pour la Polaire, $\delta = 1^\circ 4'$, $\sin\delta = 0{,}0187 = \frac{1}{53}$ environ. La Polaire emploiera donc à peu près cinquante-trois fois plus de temps qu'une étoile équatoriale à aller d'un fil à l'autre.

Dans la méthode de l'œil et de l'oreille, l'erreur probable de l'observation d'une étoile dépend de la vitesse de son mouvement et aussi du grossissement G de la lunette. On a trouvé, par de nombreuses expériences,

$$\pm\sqrt{(0^s,07)^2+\left(\frac{3^s,2}{G\sin\delta}\right)^2},$$

ce qui donne à peu près $+0^s,07$ pour une étoile équatoriale observée avec un grossissement de 200 fois et $+0^s,70$ pour la polaire. L'erreur probable de la moyenne des observations faites aux cinq fils est bien moindre; elle se réduit à

$$\pm\frac{0^s,07}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}031,$$

ainsi que nous le verrons bientôt par la théorie des erreurs [1].

Il résulte de là que, pour déterminer l'heure, il faut observer des étoiles voisines de l'équateur et non des circumpolaires. Mais l'on doit aussi observer ces dernières, comme nous le verrons plus loin, pour déterminer les erreurs instrumentales, c'est-à-dire les déviations de la lunette lorsqu'elle s'écarte du méridien.

L'enregistrement électrique abaisse l'erreur probable de moitié environ. Elle devient insignifiante avec le micromètre impersonnel.

Pendant le jour, les fils se voient parfaitement; ils se peignent en traits noirs sur le fond brillant du ciel, tandis que les étoiles, du moins celles des trois premières grandeurs, apparaissent comme des points lumineux, à cause de leur intensité supérieure à l'éclairement du ciel. Mais, la nuit, les fils ne se verraient pas si l'on n'éclairait artificiellement le champ de la lunette. Pour cela, on place obliquement, dans le cube qui réunit les deux moitiés de l'axe de rotation aux deux moitiés du tube de la lunette, un miroir qui réfléchit la lumière d'une lampe placée à l'une des extrémités de l'axe, près du foyer d'une lentille convergente. Le tourillon en acier est percé d'un large trou cylindrique qui laisse passer les rayons de la lampe. Le miroir incliné à 45° renvoie la lumière vers le réticule, qui se projette ainsi sur un fond lumineux. On peut d'ailleurs en faire varier l'éclat à volonté à l'aide d'un diaphragme mobile placé sur le trajet des rayons. Bien entendu, ce miroir est percé lui-même en son centre d'un large trou elliptique pour laisser passer le faisceau des rayons extérieurs qui vont de l'objectif à l'oculaire.

---

[1] On doutera peut-être que l'oreille saisisse de si petites fractions de seconde. Il en est pourtant ainsi. Si l'on place à côté l'une de l'autre deux pendules, l'une de temps sidéral, l'autre de temps moyen, on remarquera que, de six en six minutes à peu près, leurs battements sont parfaitement synchrones ($6^m\ 6^s$ sid. $= 6^m\ 5^s$ t. m.). Ils commencent ensuite à discorder, et le désaccord va en croissant jusqu'à ce que l'une regagne l'autre de nouveau. Cela fait une sorte de vernier qui permet de subdiviser la seconde en $6 \times 60 = 360$ parties égales. On s'assurera aisément qu'il n'y a pas plus de cinq à six secondes d'incertitude sur l'instant d'une coïncidence de battements, incertitude qui répond à une différence de $\frac{6}{2} \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{120}$ de seconde. Le centième de seconde n'est donc pas une quantité qui échappe absolument à nos sens.

Erreur personnelle.

Nous avons déjà dit que l'observateur est lui-même une sorte d'instrument sujet à la fois à des erreurs accidentelles et à des erreurs constantes ou du moins systématiques. Il intervient par les organes de ses sens, l'œil et l'oreille, et par son système nerveux qui reçoit et coordonne les impressions. Voici quel est l'effet de cette intervention. Un observateur exercé aura bien vite fait de déterminer l'heure à $0^s,02$ ou $0^s,03$ près par quelques étoiles fondamentales. Il lui suffit d'un petit nombre d'observations pour compenser l'effet des erreurs dues aux ondulations des étoiles ou à ses propres fautes accidentelles. Mais, si un autre astronome du même établissement, employant le même instrument, vient à déterminer l'heure à son tour par des observations analogues, on trouvera entre les deux résultats un désaccord dix, quinze, vingt fois plus grand que l'erreur probable de chacun d'eux pris à part. Chose remarquable, la différence entre les deux observateurs sera toujours à peu près la même et dans le même sens. Maskelyne, le premier qui se soit aperçu de cette singulière anomalie entre un de ses élèves et lui, crut devoir prier celui-ci de renoncer à la carrière de l'Astronomie. On sait aujourd'hui qu'il n'y a pas deux observateurs qui s'accordent, et l'on s'est tiré d'affaire en s'imposant l'obligation de ne combiner ensemble que les observations faites par un même observateur. Afin d'éviter toute confusion à cet égard, on a établi la règle que toute observation doit être signée. L'erreur étant constante, elle disparaît en effet dans la différence de deux observations faites par le même individu, en sorte que les différences d'A de deux étoiles ont même valeur, quel que soit l'observateur qui les détermine, tandis que l'heure absolue variera au contraire de quelques dixièmes de seconde, selon qu'on s'adressera à tel ou tel observateur pour l'obtenir.

La méthode de l'enregistrement électrique laisse encore quelque place à l'intervention du système nerveux de l'observateur : celui-ci marque trop tôt, ou trop tard, suivant sa constitution physiologique, l'instant où l'étoile en mouvement lui paraît bissectée par le fil. L'erreur personnelle se retrouve donc encore, mais réduite, en général, à moins d'un dixième de seconde.

Sans chercher à expliquer ces effets physiologiques, constatons qu'ils n'existent pas lorsqu'il s'agit d'un orchestre ou si l'on veut faire marcher des hommes au pas, sur le rythme du tambour; ils ne sont donc pas dus à une paresse de l'ouïe ou à la durée trop grande des sensations auditives.

Ils ne tiennent pas davantage à un défaut de l'œil pour la bissection d'un point fixe par un fil, car cela se juge à $0'',05$, c'est-à-dire à $0^s,003$ près. Ils tiennent à une inertie particulière au système nerveux qui varie, d'un homme à l'autre, dans des limites très étendues lorsqu'il s'agit d'un phénomène fugitif qu'il faut saisir. On éliminerait ces effets, s'ils étaient constants, en déterminant une fois pour toutes l'erreur personnelle d'un observateur, c'est-à-dire la fraction de seconde de temps qu'il faut constamment ajouter ou retrancher aux heures notées par lui, et c'est ce qu'il faut faire toutes les fois qu'on a besoin de connaître l'heure absolue; mais ils dépendent aussi de son état physiologique, de son état de réplétion ou de jeûne, de la circulation du sang régulière ou agitée, etc. La seule ressource, si l'on veut n'être pas arrêté au niveau de la précision actuelle, c'est de supprimer l'observateur comme c'est à peu près réalisé avec le micromètre impersonnel [1].

Rectification de la lunette méridienne.

La lunette méridienne ne donne pas immédiatement les ascensions droites absolues, puisque le point γ n'est pas observable, mais elle donne les différences d'ascension droite entre les diverses étoiles. Si donc nous faisons choix de l'une d'elles pour servir d'origine provisoire au jour sidéral et aux A, il nous suffira de déterminer plus tard l'ascension droite absolue de cette étoile par rapport au point γ pour avoir aussitôt, par une simple addition, les ascensions droites absolues de toutes les autres. Ce qui fait le mérite de cet instrument, c'est que, n'opérant que dans un plan vertical, les observations ne sont affectées ni de la réfraction atmo-

[1] Ces erreurs personnelles varient en outre, pour chaque observateur, suivant l'éclat de l'étoile; elles varient d'une étoile à une planète ayant un disque sensible, et, chose singulière, pour le Soleil ou la Lune, suivant que c'est le premier ou le deuxième bord que l'on observe.

sphérique ni de la flexion du tube ou de l'axe de la lunette. Nous avons dit, en effet, que la réfraction agit dans le vertical de l'astre observé en le rapprochant du zénith, mais n'a aucune tendance à le faire sortir de ce plan vertical. Quant à la flexion, ainsi que nous l'avons vu, les deux moitiés de la lunette méridienne à droite et à gauche du vertical qu'elle décrit étant parfaitement symétriques, la flexion du tube s'opère dans ce plan et ne produit aucune déviation latérale. Enfin la mesure des $\mathcal{R}$ s'effectue à l'aide d'une pendule et non au moyen d'un cercle divisé; on n'a donc pas à craindre ici des erreurs systématiques de division, mais seulement de petites anomalies dans la marche de la pendule, dues aux trépidations du sol ou aux variations de pression ou de température. Il n'est pas impossible d'y remédier complètement.

Pour que l'axe optique décrive le méridien, il faut : 1° que cet axe optique ou ligne de collimation soit perpendiculaire à l'axe de rotation, autrement il décrirait un cône qui tracerait sur le ciel un petit cercle parallèle au méridien, mais ne pouvant coïncider avec lui; 2° que l'axe de rotation soit parfaitement horizontal, autrement le plan décrit par la ligne de visée serait incliné sur l'horizon et ne pourrait coïncider avec le méridien; 3° que cet axe soit bien perpendiculaire à la méridienne SN du lieu.

Trois opérations sont donc nécessaires pour rectifier l'instrument et pour déterminer les petites erreurs qui subsistent encore après une correction manuelle, ou qui surviennent par suite de l'instabilité des piliers ou des variations de température, car nos instruments ne sont pas des solides invariables. On saisira aisément l'analogie qui existe entre les rectifications d'un théodolite et celles d'un instrument des passages. Les opérations sont les mêmes, les formules de correction sont encore plus simples.

Rectification de la collimation. — On opère ici par retournement. La lunette étant dirigée, à l'horizon, sur une mire, très éloignée et portant une division, on note le trait *m* sur lequel se projette le fil méridien, puis on retourne la lunette avec la plus grande précaution. Pour cela, on la soulève d'abord avec une machine *ad hoc*, on la fait tourner de 180° autour d'un axe vertical et on la fait ensuite redescendre d'un mouvement doux jusqu'à ce que les tourillons reposent sur leurs coussinets. Alors on ramène la lunette

sur la mire. Si la ligne de visée répond encore à la division m de la mire, l'erreur de collimation est nulle; s'il en est autrement, soit m' la division bissectée actuellement par le fil méridien : l'erreur de collimation sera

$$c = \frac{m' - m}{2},$$

qu'on réduira en secondes d'arc en déterminant une fois pour toutes la valeur des parties de la division de la mire. Pour corriger cette erreur, on déplacera le réticule tout entier à l'aide de ses vis antagonistes jusqu'à ce que le fil méridien réponde à la division $\frac{m' + m}{2}$. La même manœuvre, répétée après la correction, permettra de mesurer la collimation résiduelle c.

Rectification de l'inclinaison. — Si nous supposons que les tourillons soient bien égaux et bien ajustés dans le prolongement l'un de l'autre, il suffira de placer un niveau reposant par ses deux pieds sur les tourillons pour mesurer l'inclinaison et, au besoin, pour la corriger. Soient m le milieu de la bulle dans la première position du niveau et m' le milieu après qu'on a retourné le niveau bout pour bout sur l'axe. L'inclinaison sera

$$\beta = \frac{m' - m}{2}.$$

Pour la corriger, il suffira de soulever un peu l'un des tourillons, qui doit être armé à cet effet d'une vis à filets serrés, jusqu'à ce que la bulle marque la division $\frac{m' + m}{2}$. Il est facile de voir que la formule ci-dessus donne l'angle d'élévation, positive ou négative, du tourillon vers lequel s'est trouvé le zéro de la division du niveau dans la première pose. Par exemple :

	Extrémité de la bulle. Est.	Ouest.	Moyennes.	
	p	p		p
1re pose.....	28,2	18,0	m.....	23,1 ($1^p = 1'',52$)
(On retourne le niveau.) 2e pose.	21,3	31,5	m'.....	26,4
			$m' - m$.	3,3
			β.....	$1,65 = 2'',49$

C'est le tourillon Ouest qui est le plus élevé.

Un nivellement par retournement donnera donc, avec son signe, l'inclinaison résiduelle, qu'il est toujours facile, de même que la collimation, de réduire à quelques secondes d'arc, donc à une petite fraction de seconde de temps.

Rectification de l'azimut. — Si la lunette est bien dans le méridien, le plan que décrit son axe optique supposé sans collimation coupe en deux parties égales les parallèles parcourus par les circumpolaires. Deux passages consécutifs d'une de ces étoiles, l'un supérieur, l'autre inférieur, seront donc séparés rigoureusement par un intervalle de 12 heures; ou encore, si l'on ne connaît pas la marche de la pendule dont on dispose, trois passages consécutifs seront séparés par des intervalles égaux. Si l'intervalle diffère de 12 heures dans le premier cas, ou si les intervalles sont inégaux dans le second, il faut faire mouvoir horizontalement un des coussinets de l'axe de la lunette, jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'égalité.

Ici intervient un nouvel emploi de la mire dont nous nous sommes servis déjà pour corriger la ligne de collimation. Lorsqu'on a une fois réussi à placer exactement la lunette dans le méridien, on la dirige sur la mire et on note la division qui répond au fil du milieu. Dès lors, quand, à une époque ultérieure, on voudra commencer une série d'observations, on devra s'assurer d'abord, en pointant sur la mire, que le fil méridien répond bien à cette division. A cause de la grande distance (plusieurs lieues) qui doit séparer la mire de la lunette, les très petites variations que la mire peut éprouver, par suite des changements de température ou des légers mouvements du sol, seront insensibles, car 1^{mm}, par exemple, qui, s'il s'agissait d'un des tourillons, déterminerait une déviation azimutale énorme, ne produirait ici que $\frac{0,001}{16\,000}$ (distance de 4 lieues) ou $\frac{1''}{80}$.

Collimateurs.

Il est intéressant d'examiner les ressources de tout genre que les astronomes mettent en œuvre pour étudier ou écarter les causes d'erreurs. Les mires éloignées ont l'inconvénient de paraître souvent ondulantes, à cause du mélange incessant de masses d'air d'inégale densité dans les couches basses de l'atmosphère. Elles

ont, de plus, le grave inconvénient de n'être pas visibles la nuit. On les a remplacées par des *collimateurs* à long foyer.

Lorsqu'on regarde dans une lunette par l'objectif, il est impossible de distinguer les fils du réticule; mais, si l'on y dirige une lunette mise au point sur les astres, on voit aussitôt la croisée des fils avec une netteté merveilleuse. Cela tient à ce que, dans les lunettes astronomiques, le réticule doit être placé dans le plan focal principal. Dès lors, le faisceau conique émané d'un point du réticule est transformé par l'objectif en un faisceau de rayons parallèles qui, reçu par une seconde lunette astronomique, forme image au foyer principal de celle-ci.

Supposons maintenant un réticule à la seconde lunette. Il sera facile de diriger celle-ci de manière à faire coïncider ce réticule avec l'image de l'autre. Alors les axes optiques des deux lunettes seront en ligne droite ou du moins parallèles. C'est, comme l'on voit, une manière de reculer à l'infini une mire très voisine. W. Struve a eu l'idée heureuse de s'en servir en guise de mire. Devant l'objectif de la lunette méridienne et porté sur un pilier, imaginez un objectif, mobile latéralement, et rendant visible, dans la lunette, une mire placée à 60^m ou 80^m au delà. Cette mire nouvelle pourra être éclairée la nuit; elle sera toujours parfaitement visible, presque sans ondulations, et elle servira tout aussi bien qu'une mire très lointaine à donner une direction fixe en azimut ou à rectifier la collimation de la lunette méridienne. Si même on emploie ainsi deux collimateurs opposés, l'un au Sud, l'autre au Nord, que l'on puisse diriger l'un sur l'autre, soit en soulevant un peu la lunette méridienne, soit en pratiquant une ouverture ronde dans son cube, on sera en état, en pointant alternativement la lunette méridienne sur ces deux mires qui fournissent deux directions diamétralement opposées, de corriger ou de rectifier la collimation de l'instrument méridien sans avoir besoin d'opérer le retournement. Nous verrons plus loin une autre application de ces collimateurs que les physiciens ont empruntés aux astronomes et dont ils ont tiré un très grand parti dans leurs expériences.

Remarque essentielle.

Les travaux exécutés depuis des siècles dans les observatoires donnent aujourd'hui, avec une grande précision, les coordonnées $\mathcal{R}$ et δ d'un grand nombre d'étoiles, en particulier, de celles que l'on appelle les étoiles fondamentales. Mais, comme nous le verrons plus tard, les étoiles ne sont pas rigoureusement fixes sur la sphère céleste, et d'autre part, les progrès réalisés dans les instruments permettent toujours d'améliorer les résultats précédemment obtenus.

Le travail actuel des observatoires, en ce qui concerne les $\mathcal{R}$ et les δ, est donc surtout un travail d'amélioration continuelle de ces coordonnées.

Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'on est en possession des catalogues d'étoiles qui donnent pour ces dernières les ascensions droites et les distances polaires adoptées à l'époque où se font les observations.

Corrections à apporter au passage d'un astre à la lunette méridienne.

Supposons que nous ayons déterminé par un retournement et un nivellement les erreurs résiduelles de collimation et d'inclinaison et imaginons également que l'instrument s'écarte tant soit peu du plan méridien.

Voyons tout d'abord l'effet d'une petite collimation résiduelle sur le temps du passage d'une étoile au méridien.

Si l'axe optique n'est pas rigoureusement perpendiculaire à l'axe de rotation, il décrira un cône dont la trace sur la sphère céleste sera un petit cercle BE parallèle au plan méridien PA. L'astre sera observé en E, au lieu de l'être en E′. L'erreur commise sur l'angle horaire est mesurée par le petit angle EPE′ ; EE′ mesure la collimation résiduelle c et se confond très sensiblement avec l'arc de grand cercle abaissé de E sur le plan méridien. On a donc

$$\sin P = \frac{\sin c}{\sin \delta},$$

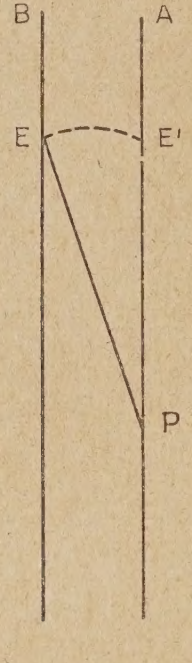
ou, en raison de la petitesse des corrections :

$$P = \frac{c}{15 \sin \delta},$$

en exprimant P en temps.

Supposons maintenant que le plan de visée instrumental

Fig. 58.



soit incliné par rapport au plan méridien, et ait en outre une déviation azimutale par rapport à ce plan, de telle sorte que le plan perpendiculaire à l'axe des tourillons ne décrit pas le plan méridien.

Soit PZ le plan méridien, P le pôle, Z le zénith, Eq le plan décrit par l'axe optique de collimation nulle (*fig.* 59).

On observe l'étoile en E, au lieu de l'observer dans le plan méridien. Il en résulte une erreur sur le temps du passage observé, exprimée par le petit angle horaire en P. On a, dans le triangle E Pq, en appelant P l'angle ZPE et q l'angle P qp :

$$\frac{\sin P}{\sin q} = \frac{\sin E q}{\sin PE} = \frac{\sin(D + \delta)}{\sin \delta}$$

au second ordre près, et dans les mêmes conditions :

$$P = \frac{1}{15} q \sin D \cot \delta + \frac{1}{15} q \cos D ;$$

posons

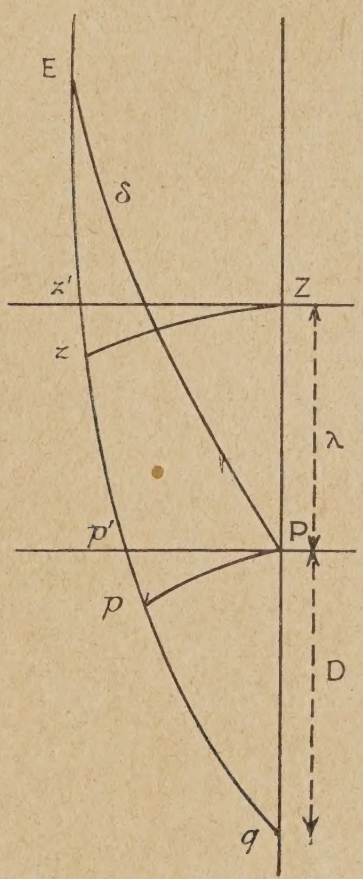
$$q \cos D = m,$$
$$q \sin D = n,$$

et réunissons dans une même expression toutes les corrections dues aux erreurs résiduelles, nous aurons

$$P = \frac{1}{15}[m + n \cot\delta + c \operatorname{coséc}\delta].$$

Si la pendule sidérale était exactement réglée, elle devrait

Fig. 59.



indiquer comme heure, quand l'étoile passe au méridien, l'ascension droite de cette étoile, soit $\mathcal{R}$. Soit T l'heure marquée par la pendule au moment de l'observation; l'heure du passage au méridien sera $T \pm P$, et si l'horloge à cet instant a un état C_p,

on aura, en définitive,

$$\text{Æ} = \text{T} + \text{C}_p + \frac{1}{15}(m + n\cot\delta + c\,\text{cosec}\,\delta),$$

formule dite de *Bessel*.

Les constantes m et n ont une signification géométrique facile à mettre en évidence. Nous pouvons, en effet, au lieu de considérer comme d'ordinaire l'inclinaison par rapport à la verticale et l'azimut dans le plan de l'horizon, considérer ces deux éléments, le premier par rapport à la ligne des pôles et le second dans le plan de l'équateur; m est alors l'erreur d'azimut dans le plan de l'équateur, et n l'erreur d'inclinaison par rapport à la ligne des pôles.

Menons, en effet, l'arc de grand cercle $\text{P}p$ perpendiculaire au plan méridien instrumental; nous aurons dans le triangle $q\text{P}p$, en négligeant les quantités du second ordre de petitesse par rapport aux corrections considérées comme étant du premier ordre :

$$\frac{\sin \text{P}p}{\sin \text{D}} = \frac{\sin pq\,\text{P}}{\sin \text{P}pq},$$

$$\text{P}p = q \sin \text{D},$$

$$\cos q\,\text{P}p = \sin pq\,\text{P}\cos \text{D}$$

ou

$$\cos q\,\text{P}p = q\cos \text{D}.$$

Or $\text{P}p$ mesure l'inclinaison de l'axe des tourillons par rapport à la ligne des pôles et l'angle $q\text{P}p$ est égal à $90^\circ - p\text{P}p'$; $\text{P}p'$ étant un arc de grand cercle perpendiculaire au méridien vrai, $p\text{P}p'$ est l'erreur en azimut dans le plan de l'équateur, donc

$$\cos(90^\circ - p\,\text{P}p') = \sin p\,\text{P}p' = q\cos \text{D}$$

$$p\,\text{P}p' = q\cos \text{D}.$$

Il est facile de passer de la formule de Bessel à une autre expression mettant en évidence, au lieu de m et de n, l'inclinaison β par rapport à la verticale et l'erreur d'azimut α dans le plan horizontal.

Menons par Z un arc de grand cercle $\text{Z}z$ perpendiculaire à $\text{E}q$ et un arc de grand cercle $\text{Z}z'$ perpendiculaire au plan méridien

vrai; on aura évidemment

$$\beta = Z z \qquad \text{et} \qquad 90^\circ - \alpha = q Z z,$$

d'où, comme P Z $= \lambda$,

$$\frac{\sin\beta}{\sin q} = \frac{\sin(D+\lambda)}{\sin Z z q},$$

$$\beta = q \sin(D+\lambda),$$

$$\sin\alpha = \sin q \cos(D+\lambda),$$

$$\alpha = q \cos(D+\lambda);$$

$$\beta = n\cos\lambda + m\sin\lambda,$$

$$\alpha = -n\sin\lambda + m\cos\lambda$$

On en déduit :

$$m = \alpha\cos\lambda + \beta\sin\lambda,$$

$$n = -\alpha\sin\lambda + \beta\cos\lambda,$$

d'où, par substitution dans la formule de Bessel,

$$\mathcal{R} = T + C_p + \frac{1}{15}\left[\alpha\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin\delta} + \beta\frac{\cos(\delta-\lambda)}{\sin\delta} + \frac{c}{\sin\delta}\right],$$

formule dite de *Mayer* (1).

La formule de Mayer, qui met en évidence l'azimut dans le plan de l'horizon, est d'un usage commode pour déterminer la correction résiduelle azimutale. Elle se déduit, en effet, très facilement de l'observation de deux étoiles d'ascensions droites $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et de distances polaires δ et δ', observées à un intervalle rapproché, de façon que l'état de la pendule puisse être considéré comme n'ayant pas varié, et en admettant que l'inclinaison et la collimation résiduelles soient suffisamment faibles pour que les corrections qui en résultent puissent être négligées. On a dans ces conditions :

$$1^{re}\text{ étoile...} \quad \mathcal{R} - T = C_p + \frac{\alpha}{15}\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin\delta},$$

$$2^{e}\text{ étoile...} \quad \mathcal{R}' - T' = C_p + \frac{\alpha}{15}\frac{\sin(\delta'-\lambda)}{\sin\delta'},$$

---

(1) On sait que les $\mathcal{R}$, et les corrections telles que α, β et c, se comptent indifféremment en temps ou en angles; dans ce dernier cas, on divise le nombre de degrés par 15 pour l'exprimer en heures.

d'où

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{(Æ - Æ') - (T - T')}{\frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} - \frac{\sin(\delta' - \lambda)}{\sin\delta'}}.$$

L'expression de α montre que, pour que le dénominateur ait la plus grande valeur possible, il faut que les δ des deux étoiles soient les plus différents possibles, ce qui conduit à combiner une étoile polaire et une étoile équatoriale.

Lorsque les observations à la lunette méridienne ont pour objet la détermination de la correction de la pendule, d'où l'on déduira ensuite son état et sa marche, on emploie de préférence la formule de Bessel, dont la forme très simple se prête bien aux calculs.

Les ascensions droites et les distances polaires sont, bien entendu, supposées connues par les travaux des observatoires dont nous avons parlé, et publiées dans les catalogues.

La détermination de la correction de pendule se fait alors de la façon suivante :

On calcule tout d'abord n, par l'ensemble des observations d'une soirée, en combinant les étoiles circumpolaires et les étoiles équatoriales observées immédiatement avant ou après, afin d'éliminer autant que possible la variation de l'état de la pendule par suite de l'effet de la marche. Si nous supposons en outre que, dans l'intervalle de temps considéré, l'instrument n'a eu aucune variation, m sera resté constant ; c, collimation résiduelle, est connu par les retournements, et l'on aura (en suivant) pour une circumpolaire :

$$Æ - T = C_p + \frac{1}{15}(m + n\cot\delta + c\,\mathrm{cosec}\,\delta),$$

pour une équatoriale :

$$Æ' - T' = C_p + \frac{1}{15}(m + n\cot\delta' + c\,\mathrm{cosec}\,\delta'),$$

d'où :

$$(Æ - Æ') - (T - T') = \frac{1}{15}[n(\cot\delta - \cot\delta') + c(\mathrm{cosec}\,\delta - \mathrm{cosec}\,\delta')],$$

et chaque combinaison analogue donnera une valeur de n.

De l'ensemble des valeurs de n, et des valeurs de l'inclinaison que l'on a obtenues dans le courant de la soirée, à l'aide du niveau, on déduit la valeur de m, par la relation

$$m = \beta \operatorname{cosec} \lambda - n \cot \lambda$$

ce qui fournira autant de valeurs de m que l'on aura fait de nivellements.

Ayant m et n, et c étant, comme on l'a dit, connu par retournements sur une mire, chaque observation d'équatoriale donnera une valeur de C_p, d'où l'on conclura le C_p moyen à l'instant moyen de la soirée. La comparaison de deux valeurs du C_p moyen, dans deux soirées différentes, donnera, connaissant l'intervalle de temps qui les sépare, la variation de C_p dans cet intervalle, d'où l'on déduira la variation horaire, c'est-à-dire la marche de la pendule. On est ainsi en état de corriger les temps des passages observés à n'importe quel instant.

Nous avons, dans la méthode qne nous venons d'employer, déterminé simultanément l'effet d'une inclinaison et d'un azimut résiduels. On peut aussi se rendre compte séparément de ces effets, en supposant chaque fois les autres conditions remplies, et arriver directement à la formule de Mayer.

Erreur d'inclinaison. — Supposons que le tourillon Ouest est le plus élevé. Le grand cercle dessiné sur le ciel par la ligne de visée ne décrira pas le méridien projeté en SZPN (*fig.* 60), mais un arc de grand cercle S e N. Une étoile e rencontrera ce grand cercle avant de passer au méridien, avec un angle horaire $e\mathrm{P}e'$ donné par

$$e\mathrm{P}e' = \frac{1}{15} \frac{ee'}{\sin \delta}.$$

Mais l'angle dièdre en S étant l'inclinaison β, on aura, par le triangle rectangle See',

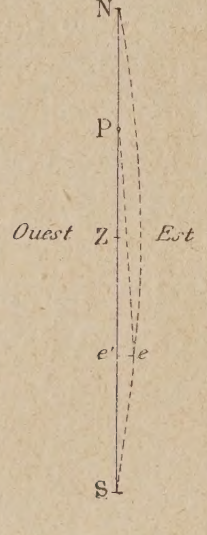
$$\sin ee' = \sin \beta \sin \mathrm{S}e' \qquad \text{ou} \qquad ee' = \beta \cos z,$$

valeur qu'il faut porter dans la relation précédente, ce qui donne

$$\frac{1}{15} \frac{\beta \cos z}{\sin \delta}.$$

L'inclinaison de l'axe d'une lunette méridienne est sujette à de petites variations plus ou moins périodiques, dépendant de l'état des couches où pénètrent les fondations des piliers en pierre de taille de l'instrument. La température y varie fort peu et suit de loin, d'une manière très affaiblie, les vicissitudes des saisons;

Fig. 60.



mais les pluies y pénètrent et font gonfler les couches. En fait, il n'y a pas de fondations, si profondes et si solides soient-elles, qui exemptent les instruments de ces petites variations. Il faut donc mesurer de temps en temps l'inclinaison β avec des niveaux très sensibles.

Nous avons supposé des tourillons d'égal diamètre : s'il en était autrement, on s'en apercevrait par ceci que l'inclinaison β ne serait plus la même avant et après le retournement.

Erreur d'azimut. — Supposons que la lunette ait une petite déviation vers l'Est. Une étoile e (*fig.* 61) rencontrera ce fil avant de passer au méridien sous un angle horaire $ePe' = \frac{ee'}{\sin\delta}$. L'angle dièdre en Z du petit triangle rectangle $e\,Z\,e'$ étant α, et $Z\,e$ ou $Z'e'$ étant z, on aura

$$ee' = \alpha \sin z.$$

Par suite, il faudra ajouter à l'heure du passage de l'étoile en e', la correction

$$\frac{1}{15}\,\frac{\alpha \sin z}{\sin\delta}.$$

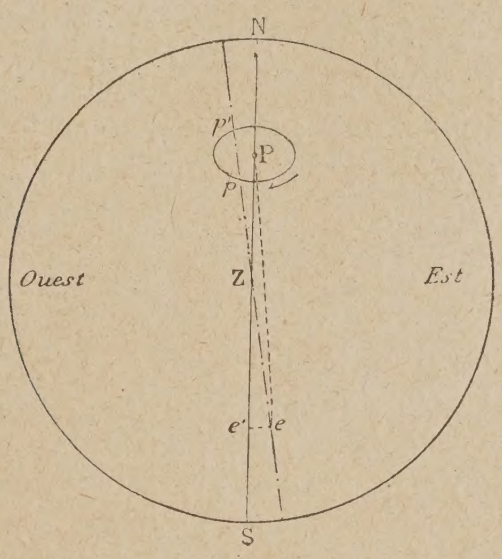
Nous avons précédemment déterminé α, à l'aide de la formule de Mayer, par l'observation d'une polaire et d'une équatoriale. On peut aussi déterminer l'azimut par l'observation d'une polaire à ses deux passages, supérieur et inférieur.

Considérons la circumpolaire p à son passage supérieur observé à l'heure h. L'heure du passage au méridien sera évidemment

$$h - \frac{1}{15}\frac{\alpha \sin z}{\sin \delta}.$$

Soit h' l'heure du passage inférieur en p' au fil du milieu, lorsque

Fig. 61.



la distance zénithale est $Zp' = z'$. Nous aurons, pour l'heure de son passage au méridien,

$$h' + \frac{1}{15}\frac{\alpha \sin z'}{\sin \delta}.$$

Mais la différence de ces heures doit être juste de 12 heures; on aura donc l'équation de condition

$$h' + \frac{\alpha \sin z'}{15 \sin \delta} - h + \frac{\alpha \sin z}{15 \sin \delta} = 12^h,$$

d'où l'on pourra tirer la valeur de α. Plus l'étoile est voisine du pôle et mieux α sera déterminé, puisque son coefficient $\frac{\sin z' + \sin z}{15 \sin \delta}$ sera d'autant plus grand que δ sera plus petit. Mais, comme l'un des deux passages a ordinairement lieu en plein jour, il faut recourir

aux plus belles étoiles : de là l'importance de la polaire dans la pratique journalière des astronomes. Bien que h' et h ne s'observent guère qu'à $0^s,3$ près, ce qui donne $\pm 0^s,42$ d'incertitude sur $h' - h$, le diviseur $\frac{53}{15}$ (*voir* p. 157) réduit l'erreur à craindre sur α à moins de $0'',2$ [1].

Les deux formules de Bessel et de Mayer permettent, comme nous l'avons vu, de déterminer par l'ensemble de toutes les observations d'une soirée, la correction de pendule à un instant moyen. Leur application suppose connues les $\mathcal{R}$ et δ des étoiles des catalogues. Mais les observations méridiennes indéfiniment poursuivies dans les observatoires, en vue de la détermination de la correction des pendules, permettent également la détermination des petites variations que subissent, dans le cours des temps, les coordonnées des étoiles, c'est-à-dire leur amélioration continuelle. La discussion de toutes les valeurs obtenues pendant plusieurs mois pour la correction de pendule et la marche donne, en effet, comme on s'en rendra compte dans la théorie des erreurs d'observation, des valeurs de l'état absolu de la pendule, à un instant déterminé, très voisines de la vérité. En reprenant alors la formule de Bessel, relative à chaque observation particulière, et en y introduisant les valeurs de c, m et n correspondantes, telles qu'elles résultent de la discussion d'ensemble, on en conclura une ascension droite que l'on pourra comparer à l'ascension droite du catalogue. On aura ainsi autant de valeurs de cette ascension droite que d'observations de l'étoile. On conçoit que la moyenne de toutes les ascensions droites d'une même étoile donnera une valeur de cette coordonnée, pour une certaine date moyenne, très voisine de la vérité, qui permettra d'améliorer la valeur antérieure inscrite au catalogue. La comparaison, faite sur un grand nombre d'années, des valeurs des coordonnées permettra en outre l'étude des causes des petites variations

---

(1) Cela suppose que, pendant les 12 heures, l'instrument n'a pas varié en azimut. On s'en assure avec la mire, ou mieux avec les collimateurs dont il a été question, et, s'il était survenu quelque changement, on le mesurerait et l'on en tiendrait compte.

constatées. Ainsi qu'on l'a dit déjà, les plus grandes découvertes astronomiques sont dues à la persévérance que l'on a mise depuis des siècles à la poursuite des observations méridiennes.

Voici, comme exemple, un *extrait du registre d'observation* faites à l'une des lunettes méridiennes de l'Observatoire de Paris.

Il importe de ne pas perdre de vue qu'il y a deux positions de la lunette, l'une avant, l'autre après le retournement. Il ne faut pas oublier que, d'une position à l'autre, la collimation c change de signe. Le retournement doit être fait aussi souvent qu'il y a lieu de soupçonner quelque variation dans la direction de la ligne de visée. Il s'opère à l'aide d'un mécanisme spécial qui permet de soulever la lunette très doucement et d'en retourner l'axe bout pour bout (1). La lunette méridienne est ordinairement munie de contrepoids qui ne laissent peser sur les tourillons qu'une faible partie de la charge.

Le niveau a donné $\beta = +0^s,38$. Le retournement a donné $c = +0^s,15$. De l'observation des trois étoiles circumpolaires, on tire $\alpha = -0^s,55$. La quatrième colonne contient la somme des corrections instrumentales calculées avec ces valeurs de β, α et c. La cinquième colonne donne l'heure du passage de chaque astre au méridien en temps de la pendule. Les $\mathcal{R}$ des étoiles fondamentales, prises dans la *Connaissance des Temps*, sont inscrites dans la sixième colonne (les secondes seulement), et la différence avec le passage observé donne la correction de la pendule. Elle est, le 24 avril, vers 8^h, de $-37^s,69$. Le lendemain, vers 15^h, c'est-à-dire 7 heures après, elle est de $-37^s,70$. La marche diurne est donc négligeable. Pour avoir les $\mathcal{R}$ du Soleil, de la Lune et des planètes observées ces jours-là, il suffit d'ajouter la correction $-37^s,69$ aux heures marquées par la pendule à l'instant de leurs passages au méridien.

Remarque. — On verra, à la fin de ce Cours, que l'effet de blera-ration diurne a la forme du dernier terme des formules de Bessel et de Mayer, et peut être réuni avec lui, en remplaçant c par $c - 0^s,021 \sin\lambda$.

---

(1) Un appareil de ce genre se voit sur la figure 62.

EXEMPLE DE DÉTERMINATIONS D'ASCENSIONS DROITES.

Observatoire de Paris. — CERCLE BISCHOFFSHEIM (position inverse).

Date : 24 avril 1923. Observateur : A. LAMBERT.

ÉTOILES.	NOMBRE de passages.	PASSAGE observé.	SOMME des corrections instrumentales.	PASSAGE au méridien.	$\mathfrak{A}$ calculé (1).	C_p calculé.	C'_p (2).	$\mathfrak{A}$ apparente conclue.
		h m s	s	s	h m s		s	h m s
3038 Bradley P. I.....	20	10.48.20,71	+3,69	24,40	10.47.47,58	polaire	—37,69	10.47.46,71
θ Lion.....	»	11.10.54,91	—0,87	54,04	11.10.16,33	—37s,71	—37,69	11. 9.16,35
ν Grande Ourse....	»	11.15. 2,46	—0,99	1,47	11.14.23,78	—37,69	—37,69	11.14.23,78
DM+15°,2326 (3)	»	11.19.36,31	—0,86	35,45			—37,69	11.18.57,76
DM+15°,2331,..... ...	»	11.21.38,40	—0,87	37,54			—37,69	11.20.59,85
1782 Groombridge.....	»	11.27.17,17	—3,60	13,57	11.26.35,87	polaire	—37,69	11.26.35,88
ρ Lion.....	»	11.33.43,18	—0,79	42,39	11.33. 4,72	—37,67	—37,69	11.33. 4,70
DM+45°,1961.....	»	11.40.56,68	—1,12	55,56			—37,69	11.40.17,88
β Lion.....	»	11.45.50,84	—0,86	49,98	11.45.12,30	—37,68	—37,68	11.45.12,29
1850 Groombridge.....	»	12. 1.47,27	—6,86	40,41	12. 1. 2,41	polaire	—37,68	12. 1. 2,73

(1) Pour les étoiles fondamentales ; $\mathfrak{A}$ des éphémérides ramenée au catalogue de base.
(2) C'_p est la moyenne des C_p donnée par les horaires, compte tenu de la marche de la directrice.
(3) Catalogue de la *Durchmusterung*, zone de latitude 15° Nord, numéro de l'étoile 2326.

Cercle mural.

Le centre mural n'est plus guère employé aujourd'hui et est remplacé à peu près partout par le cercle méridien.

Mais l'usage et les corrections des deux instruments, en ce qui concerne la détermination des latitudes, sont les mêmes, et comme le cercle mural est encore en usage dans certains observatoires, nous en donnerons la description ainsi que les rectifications et corrections, à apporter aux observations, qui s'appliquent également, comme nous l'avons dit, au cercle méridien.

Le cercle mural sert à mesurer les distances zénithales méridiennes, d'où l'on conclut les distances polaires par la formule

$$\delta = \lambda + z_m,$$

formule où z_m doit prendre le signe — quand il s'agit d'étoiles passant au méridien au nord du zénith.

Si l'étoile est observée à son passage inférieur, la formule devient :

$$\delta = z_m - \lambda,$$

et elle est comprise dans la précédente si l'on convient d'y regarder δ comme négatif au-dessous du pôle.

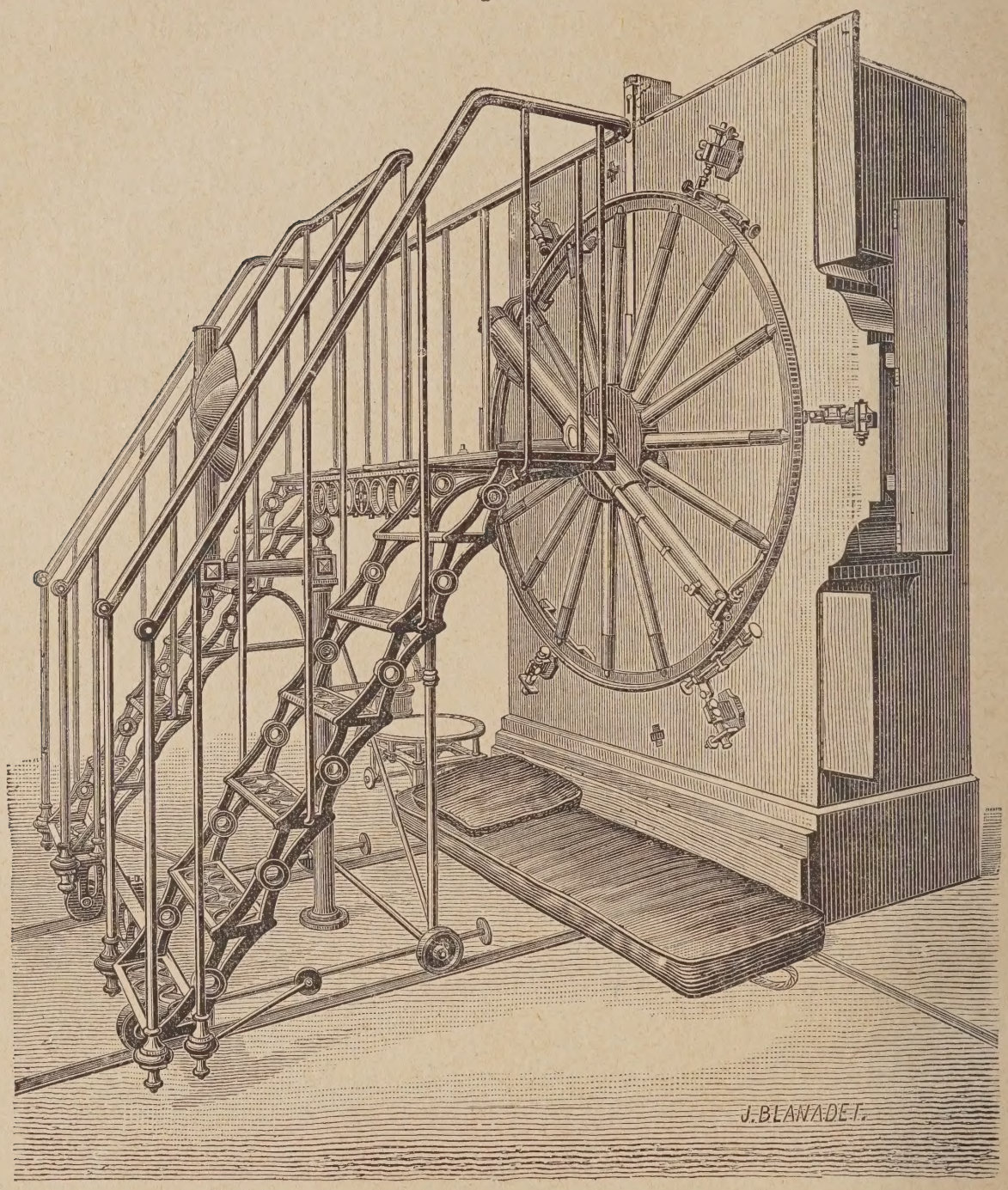
Cet instrument n'est au fond que la partie supérieure d'un théodolite dont l'axe horizontal passerait à travers un large pilier en pierre. Le limbe divisé, sur lequel la lunette est fixée par les deux bouts, est appliqué contre la face verticale de ce pilier, sans le toucher, et se meut dans le méridien. Au lieu de verniers, le cercle est entouré de microscopes à micromètre équidistants, dont les axes sont pointés sur les divisions, et qui sont solidement scellés dans le mur.

Nadir.

La lunette étant dirigée à peu près verticalement, l'objectif en bas, on place sous l'objectif un bain de mercure dont la surface

réalise un miroir parfaitement plan et horizontal. On voit ainsi par réflexion, sur ce miroir, le réticule de la lunette (1).

Fig. 62.

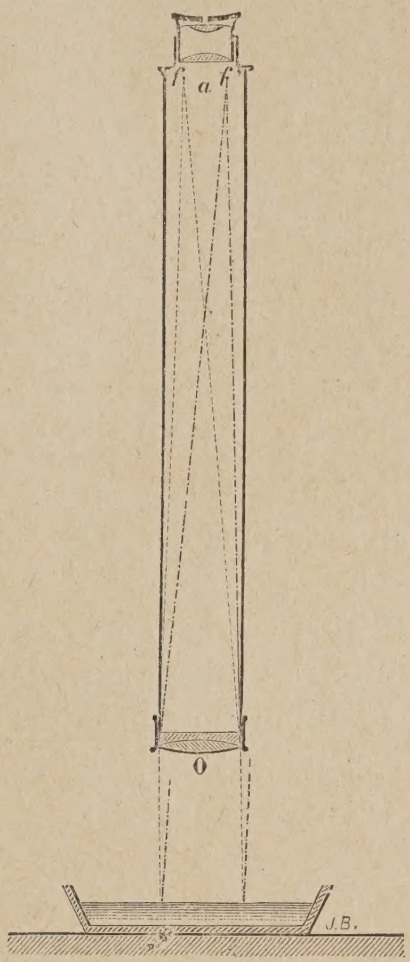


Si la ligne de visée fO (*fig.* 63) n'est pas bien verticale,

(1) Pourvu que l'oculaire soit muni d'un petit réflecteur destiné à éclairer vivement les fils ou plutôt le champ de la lunette.

l'image f' de la croisée des fils ne coïncidera pas avec f. L'écart ff' sera double de l'inclinaison de cette droite. Pour rendre celle-ci verticale, il suffira de faire tourner un peu la lunette jusqu'à

Fig. 63.



ce que f' coïncide avec f; pour cela, on fixera le limbe au pilier par une mâchoire, et l'on agira sur la tête de vis qui sert à imprimer à la lunette des mouvements doux. Si, à ce moment, on lit les six verniers, leur moyenne donnera la direction du nadir, et l'on aura celle du zénith en lui ajoutant 180°.

Soit u_0 la lecture du cercle quand la lunette est pointée sur le zénith, u la lecture obtenue quand on a visé une étoile, ε_0 et ε les erreurs des traits correspondants, on aura

$$z = u - u_0 + \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Ce n'est encore que la distance zénithale apparente; on doit

lui ajouter la réfraction, et par suite, on aura soin de noter les indications T et B du thermomètre aérien et du baromètre.

Rectification du cercle mural.

L'axe doit être horizontal. Comme il est caché dans l'épaisseur du pilier, on rend le limbe vertical au moyen d'un fil à plomb, en agissant au besoin sur des vis placées à l'extrémité de l'axe. La ligne de visée doit être perpendiculaire à l'axe de rotation. On peut se servir pour cela de deux collimateurs opposés, qu'on place horizontalement à droite et à gauche, et sur lesquels on pointe alternativement la lunette. On rectifie la ligne de visée en déplaçant convenablement le réticule dans son plan, à l'aide de deux vis opposées. Enfin, le plan vertical décrit par la ligne de visée doit coïncider avec le méridien du lieu. A cet effet, on dirige la lunette sur une étoile, et l'on note l'heure sidérale de son passage par la croisée des fils. Cette heure doit être égale à l'$\mathcal{A}$R de cette étoile. S'il en était autrement, on corrigerait l'axe en agissant sur deux vis contraires, horizontalement disposées à l'une de ses extrémités. On répète cette opération plusieurs fois, jusqu'à ce que le résultat soit obtenu le plus exactement possible. Ces rectifications n'ont pas besoin d'être faites avec la même précision que celles de la lunette méridienne.

Le réticule se compose de deux fils en croix, l'un dans le méridien, l'autre perpendiculaire au premier et, par suite, horizontal. C'est sur ce dernier qu'il faut amener l'image de l'étoile qu'on observe.

On emploie souvent un fil mobile, parallèle au fil horizontal; mais alors, il faut ajouter, à la lecture du cercle, le petit angle qu'on a fait parcourir à ce fil pour l'amener sur l'astre observé à son passage au méridien; cet angle est mesuré par une vis micrométrique fixée près de l'oculaire.

Extrait du registre des observations faites au cercle mural de Paris.

NOM de l'astre observé.	BAROMÈTRE et THERMOMÈTRE.	MOYENNE des six microscopes.	DISTANCE zénithale apparente. $u_0 - u$.	RÉFRACTION.	DISTANCE zénithale vraie.	DISTANCE polaire conclue. $\delta = z_m + \lambda$.	OBSERVATEUR.
			1er septembre 1880.				
Soleil bord supérieur.	766mm,6 / 23°,4	334°.29′.26″,8	40°.29′.53″,9	47″,8	40°.30′.41″,7	81°.40′.28″,2	F.
♀ Centre	24°,2	330. 9.28,5	44.49.52,2	55,4	44.50.47,6	86. 0.34,1	F.
Nadir		194.59.20,7	$u_0 = 14°59′20″,7$				F.
Polaire, P. I.	25°,1	57.27.59,9	−42.28.39,2	−51,0	−42.29.30,2	− 1.19.43,7	F.
η Grande Ourse		16. 3.48,4	− 1. 4.27,7	− 1,1	− 1. 4.28,8	40. 5.17,7	F.
η Bouvier		345. 9.31,1	29.49.49,6	+31,9	29.50.21,5	71. 0. 8,0	F.
Arcturus	766mm,2 / 24°,8	345.57.59,8	29. 1.20,9	+30,9	29. 1.51,8	70.11.38,3	F.
ε^2 Bouvier		353.44.18,2	21.15. 2,5	+21,7	21.15.24,2	62.25.10,7	F.
β Bouvier		7. 1. 8,8	7.58.11,9	+ 7,8	7.58.19,7	49. 8. 6,2	F.
δ Bouvier	766mm,3 / 24°,7	359.55.11,7	15. 4. 9,0	+15,0	15. 4.24,0	56.14.10,5	F.

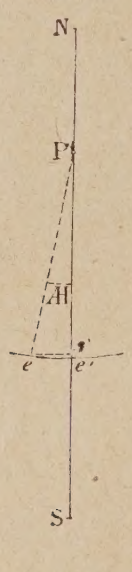
On a attribué à λ la valeur $41°\,9′\,46″,5$.

Réduction au méridien.

Lorsque l'étoile est ondulante, il se passe quelque temps avant qu'on ait saisi le milieu de ces petites oscillations. L'observation n'étant pas faite au méridien même, il faut noter l'heure H à laquelle le pointé a été effectué pour être en état de calculer une petite réduction au méridien.

L'astre a pour angle horaire, à cet instant, $H - \mathcal{A}$; et comme il se trouve sur le fil *ef* (*fig.* 64), c'est-à-dire sur un arc de grand cercle

Fig. 64.



perpendiculaire au méridien, sa distance polaire conclue serait P*f*, laquelle diffère, de la véritable P*e'*, du petit arc $fe' = Pe - Pf$. Le triangle rectangle P*ef* donne

$$\text{tang } Pf = \text{tang } Pe \cos \mathcal{A}H,$$

d'où, en mettant δ pour P*e*,

$$Pe - Pf\lambda = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \mathcal{A}H. \sin 2\delta - \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} \mathcal{A}H. \sin 4\delta + \ldots,$$

relation dont le second nombre, multiplié par 206 265″, donne la réduction cherchée.

Elle n'est pas la même que pour le théodolite; cela tient à ce que, si l'astre est observé hors du méridien, le cercle mural n'en donne pas la distance zénithale, mais seulement la projection de cette distance sur le méridien.

Détermination de λ.

La constante λ qui intervient dans tous ces calculs se détermine, une fois pour toutes, par les circumpolaires observées à leurs deux passages P. S. et P. I. L'instrument ayant donné, pour une de ces étoiles, les distances zénithales z et z' que nous supposerons corrigées de la réfraction, on en déduit

$$\text{P. S. . .} \quad \delta = \lambda - z,$$
$$\text{P. I. . .} \quad -\delta = \lambda - z',$$

d'où

$$\lambda = \frac{z + z'}{2}, \qquad \delta = \frac{z' - z}{2}.$$

Nous avons traité cette question à propos de l'étude de la réfraction.

Corrections instrumentales.

Il est aisé de maintenir les défauts de rectification du cercle mural dans des limites assez étroites pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte par le calcul. Il ne reste donc à considérer que les erreurs de division et les déformations dues à l'élasticité des pièces soumises à l'action de la pesanteur. Les astronomes ne se contentent pas d'éliminer en grande partie les erreurs de division par l'emploi de six micromètres équidistants : ils déterminent trait par trait ces erreurs, de manière à en tenir compte d'une manière tout à fait exacte. Quant à la flexion des diverses pièces, le problème est trop compliqué pour être directement abordable.

La seule ressource consiste à mesurer, avec l'instrument, des angles parfaitement connus, et à examiner si l'on en obtient bien ainsi les véritables valeurs. Les effets de la flexion variant périodiquement avec la direction de la lunette, c'est-à-dire avec la lecture u, on peut les représenter empiriquement par la série de Fourier et remplacer la lecture légèrement faussée u par la lecture exacte

$$u + a \sin(u + \mathrm{A}) + b \sin 2(u + \mathrm{B}) + \ldots.$$

Supposons que la lecture u réponde à la direction horizontale,

u' à la direction du nadir, u'' à une deuxième direction horizontale opposée à la première. Ces trois lectures corrigées seront, en remarquant que $u' = u + 90^\circ$ et $u'' = u + 180^\circ$ à très peu près,

$$u + a \sin(u + A) + b \sin 2(u + B) + \ldots,$$
$$u' + a \cos(u + A) - b \sin 2(u + B) + \ldots,$$
$$u'' - a \sin(u + A) + b \sin 2(u + B) + \ldots.$$

On en déduit les deux relations

$$u'' - u - 2a \sin(u + A) = 180^\circ,$$
$$u'' + u - 2u' - 2a \cos(u + A) = 0,$$

lesquelles feront connaître les constantes a et A du premier terme correctif. Pour déterminer pareillement les constantes du deuxième terme, il faudrait mesurer un nouvel angle de 45°.

Bessel, qui a étudié cette question d'une manière très approfondie, pensait que, pour éliminer l'influence de la pesanteur, il fallait employer un instrument susceptible de retournement et observer deux fois la même étoile, directement et par réflexion sur un horizon de mercure, dans la première position, puis recommencer les mêmes observations dans la deuxième.

La moyenne de ces quatre mesures serait indépendante de toute flexion. Il est aisé de voir qu'on n'élimine ainsi que le premier terme de la série précédente et nullement le deuxième. Toujours est-il que les astronomes ont été conduits par là à revenir aux instruments susceptibles de retournement, qui leur paraissent plus propres à une étude complète que le cercle mural. Ce sont, en partie, ces considérations qui ont fait abandonner le cercle mural et lui ont fait substituer le cercle méridien .

Erreur personnelle de l'observateur.

Ici le rôle de l'observateur est bien réduit; il s'agit de placer l'étoile observée au milieu de l'intervalle de deux fils parallèles et horizontaux. Le mouvement diurne de l'étoile n'intervient pas; il n'y a que les ondulations dues à la réfraction qui gênent le pointé. Néanmoins, dès que nos sens sont en jeu, il faut se méfier. Tracez sur un papier deux traits parallèles et placez à vue, entre eux, un

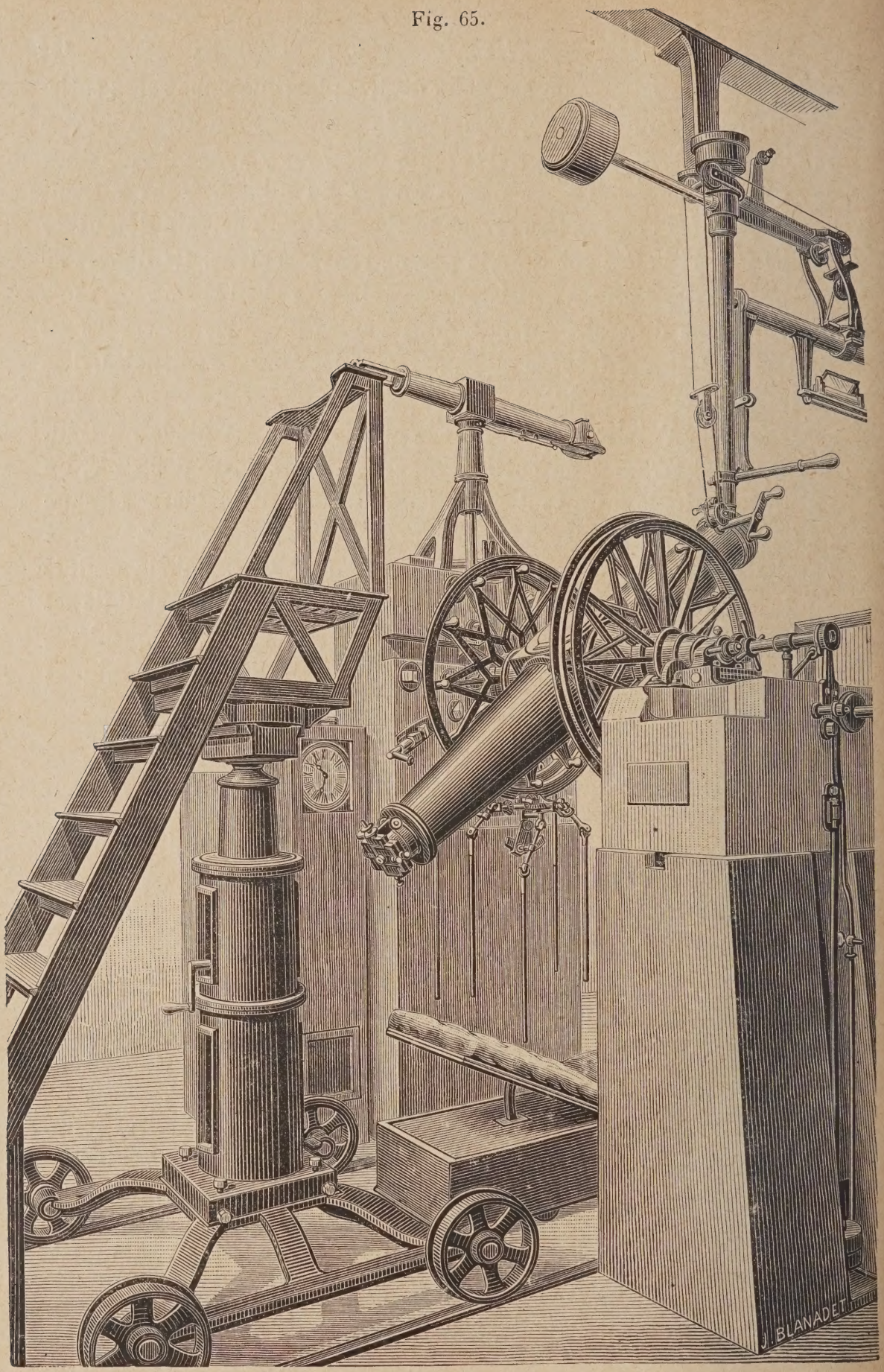
point à égale distance de ces deux droites; lorsque vous serez satisfait de ce genre de pointé, renversez la feuille de manière à mettre le haut en bas, et examinez si le point que vous y avez marqué dans la première position vous paraît encore au milieu. Vous y trouverez peut-être une petite erreur provenant d'un certain défaut de l'œil et dont l'effet est doublé par ce renversement. Ce défaut se retrouvera dans toutes les distances zénithales ainsi observées, mais avec un sens différent suivant qu'il s'agira d'étoiles observées au Sud ou d'étoiles observées au Nord. Pour les étoiles zénithales, il se retrouvera encore suivant que l'observateur, couché sur le dos pour pointer l'étoile, aura les pieds au Nord ou les pieds au Sud. Pour se débarrasser de cette erreur de pointé entre deux fils, on réduit le réticule à un seul fil horizontal qui doit bissecter l'image de l'étoile; mais ici encore l'erreur personnelle se reproduit lorsque l'étoile a un disque factice un peu grand, ou lorsqu'elle ondule au-dessus et au-dessous du fil, ou lorsque, au contraire, l'étoile est masquée entièrement par le fil. Nous retrouverons ces considérations en traitant de la détermination des latitudes astronomiques dans les opérations fondamentales de la géodésie.

Cercle méridien. Flexion des lunettes.

Ainsi que nous l'avons dit, on a substitué aujourd'hui, au cercle mural, dans tous les grands observatoires, un autre instrument, le *cercle méridien*, qui réunit le cercle mural et la lunette méridienne. Il permettrait à un seul observateur de déterminer à la fois l'A et le δ de chaque astre à son passage au méridien, mais il serait difficile à l'observateur de donner son attention à deux choses fort différentes, le pointé entre deux fils horizontaux et l'appréciation de l'instant du passage par les fils verticaux. On emploie d'ordinaire le cercle méridien dans les observatoires pour les observations méridiennes relatives à la détermination de l'heure et pour celles de la détermination des distances polaires, que l'on fait indépendamment des premières. On réserve la lunette méridienne pour la délicate détermination des étoiles fondamentales et des constantes de l'Astronomie.

Dans un cercle méridien, la lunette n'est plus fixée au limbe aux deux extrémités, comme dans le cercle mural; elle n'est portée par

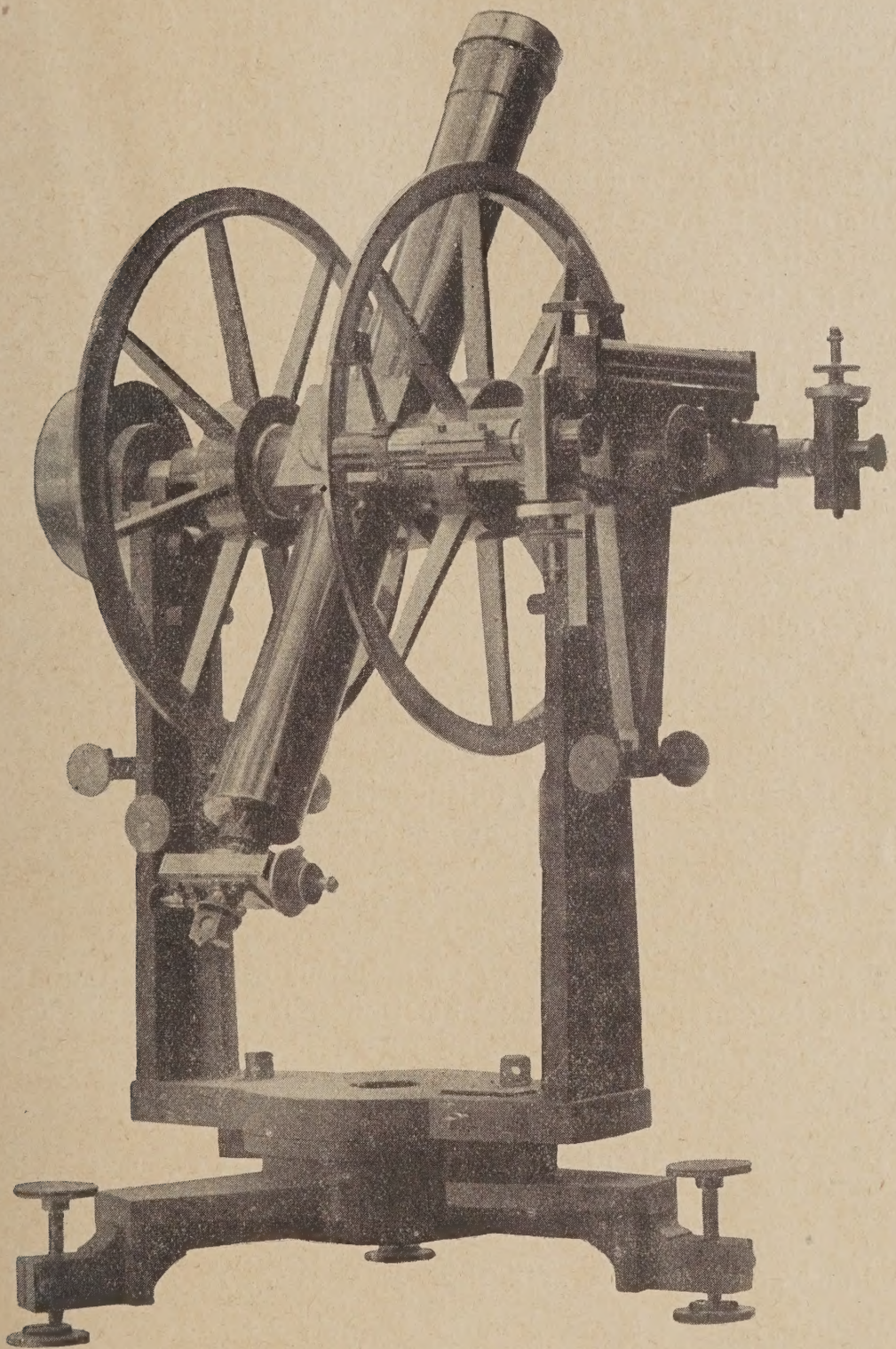
Fig. 65.



Cercle méridien, donné par M. Bischoffsheim à l'Observatoire de Paris.

l'axe qu'en son milieu. La *flexion* est donc plus grande et exige une étude particulière. Il ne faut pas la confondre avec ce qu'on appelle

Fig. 66.



Cercle méridien portatif de Brunner à deux microscopes.

de ce nom en Mécanique. Une pièce de bois ou de métal supportée en son milieu se courbe légèrement sous son propre poids ; ses deux

extrémités s'abaissent d'une manière sensible. Il en sera de même de la lunette de l'instrument dont il s'agit ici. Si les deux extrémités s'abaissent également, la ligne de visée, déterminée par le centre optique de l'objectif et la croisée des fils du réticule, ne changera pas de direction; elle sera seulement transportée un peu plus bas, ce qui est sans effet sur les observations. Mais, si les deux flexions sont inégales, il y aura déviation; celle-ci n'est donc qu'une différentielle de la flexion ordinaire. Représentons la force qui la détermine par une petite droite verticale appliquée à l'une des extrémités de la lunette, et faisant avec la ligne de visée un angle égal à z. Sa composante, dans le sens perpendiculaire à l'axe de la lunette, sera seule efficace pour produire la flexion; l'autre, dans le sens de l'axe, tend seulement à comprimer les matériaux dont le tube se compose. La première composante est proportionnelle à $\sin z$; il en sera donc de même de l'effet produit. Dès lors, on voit que la *flexion doit varier comme le sinus de la distance zénithale.* Nulle au zénith, elle atteint son maximum f à l'horizon.

Pour déterminer la constante de l'expression $f \sin z$, on emploie deux collimateurs horizontaux opposés, sur lesquels on pointe alternativement la lunette du cercle méridien. Soient u la lecture du limbe dans la première position, u' la lecture dans la position diamétralement opposée. Pour corriger ces lectures de la flexion, il faut écrire $u + f$, $u' - f$, puisque les deux z sont égaux à 90° et à -90°. Leur différence devant être de 180°, on aura

$$u' - u - 2f = 180^\circ,$$

équation qui fera connaître f en grandeur et en signe. Dès lors, toutes les distances zénithales ainsi obtenues devront recevoir la correction $f \sin z$.

Détermination simultanée de la colatitude et des constantes de la réfraction.

Pour déterminer la colatitude au cercle mural ou au cercle méridien par les circumpolaires, il faut, comme on l'a vu, se tourner vers le Nord, et observer une série d'étoiles circumpolaires à leurs passages supérieur et inférieur. En désignant par z_1

et z'_1 les distances zénithales d'une même étoile, on a

$$2\lambda = z_1 + \rho + f \sin z_1 + z'_1 + \rho' + f \sin z'_1.$$

La réfraction étant de la forme (p. 131) :

$$A \operatorname{tang} z_1 + B \operatorname{tang}^3 z_1,$$

si nous désignons par $\partial\lambda$, ∂A, ∂B les corrections à ajouter aux valeurs approchées λ', A', B' de ces constantes, on formera, par chaque étoile circumpolaire, une équation de condition

$$N + 2\partial\lambda + \partial A(\operatorname{tang} z_1 + \operatorname{tang} z'_1) + \partial B(\operatorname{tang}^3 z_1 + \operatorname{tang}^3 z'_1) = 0,$$

équation où les coefficients de ∂A et de ∂B doivent être multipliés par les facteurs relatifs au baromètre et au thermomètre.

En traitant ces équations par la méthode des moindres carrés, on aura les valeurs les plus probables des inconnues, et par suite celle des constantes λ, A, B. Puis on remplacera, dans ces équations, les inconnues par leurs valeurs; les résidus donneront une idée nette du degré de précision des observations et des résultats conclus, pourvu qu'aucune erreur systématique ne s'y soit introduite.

Comme la formule de ρ n'est valable que jusqu'à 79° de distance zénithale, on aura soin de ne pas employer d'étoiles qui dépassent cette distance-là à leur passage inférieur. Il faut réserver ces étoiles pour soumettre les théories de la réfraction au contrôle de l'observation, dans la partie où elles commencent à dépendre d'une hypothèse plus ou moins gratuite sur la constitution de l'atmosphère.

Il est essentiel d'employer dans ces calculs la vraie température de l'air. Une erreur de 1° produirait une altération sensible dans les résultats, et particulièrement dans la valeur conclue de λ. Il faut que la température de la salle d'observation soit la même que celle de l'air extérieur, et que le thermomètre soit soustrait aux radiations du sol ou des corps voisins. Enfin sa graduation et son zéro doivent être contrôlés avec soin.

Ici se présente une vérification précieuse, mais fort délicate. Au sud du zénith, les distances zénithales du Soleil, vers les deux solstices, donnent également λ, ainsi que nous le verrons plus loin, pourvu qu'on opère sur un très grand nombre d'observations. La flexion, l'erreur personnelle de l'observateur, l'influence de la réfraction agissant alors en sens contraire, l'accord des deux valeurs

de λ obtenues au Sud et au Nord, sera une garantie considérable. Leur désaccord indiquerait la présence de causes d'erreurs dont il faudrait se préoccuper.

En Géodésie astronomique, où l'on a pour but unique de déterminer λ, on observe à la fois au Sud et au Nord, mais seulement des étoiles fondamentales. En prenant la moyenne de mesures faites ainsi à une même distance du zénith, on élimine l'effet des petites erreurs dont nous venons de parler. Nous reviendrons un peu plus loin sur cette méthode.

Travaux d'un observatoire.

Les observations méridiennes sont la base de l'Astronomie. La règle est d'observer le Soleil, la Lune et les planètes à leur passage au méridien *en toute occasion*, et de comparer ces observations à la théorie, c'est-à-dire aux positions de ces astres que la *Connaissance des Temps* publie annuellement, d'après les Tables astronomiques fondées sur la théorie de l'attraction. Ce travail doit être continué indéfiniment, de jour en jour, d'année en année, de siècle en siècle. Il a pour but de fournir les éléments nécessaires au perfectionnement incessant de la théorie. Les plus grandes découvertes sont dues à la persévérance avec laquelle les observations méridiennes ont été conduites, depuis deux siècles, notamment dans les Observatoires de Greenwich et de Paris.

Les astronomes observent aussi chaque jour un certain nombre d'étoiles de toute grandeur, afin d'en déterminer les coordonnées A et δ. Ils en forment soit des Catalogues, qui donnent ces coordonnées pour une certaine date, comme le Catalogue de Bradley, contenant 5000 étoiles jusqu'à la 6^{e} grandeur, le Catalogue de 9000 étoiles de Lacaille pour le ciel austral, celui de Piazzi, celui de Lalande qui comprend 30000 étoiles, les Catalogues de l'Observatoire de Berlin et de l'Association britannique, soit des éphémérides annuelles, donnant les positions des étoiles de jour en jour, pour chaque année, telles que la *Connaissance des Temps*, publiée par le Bureau des Longitudes, à Paris, et l'*American Ephemeris*, publié à Washington, et qui renferment l'un et l'autre environ 600 étoiles.

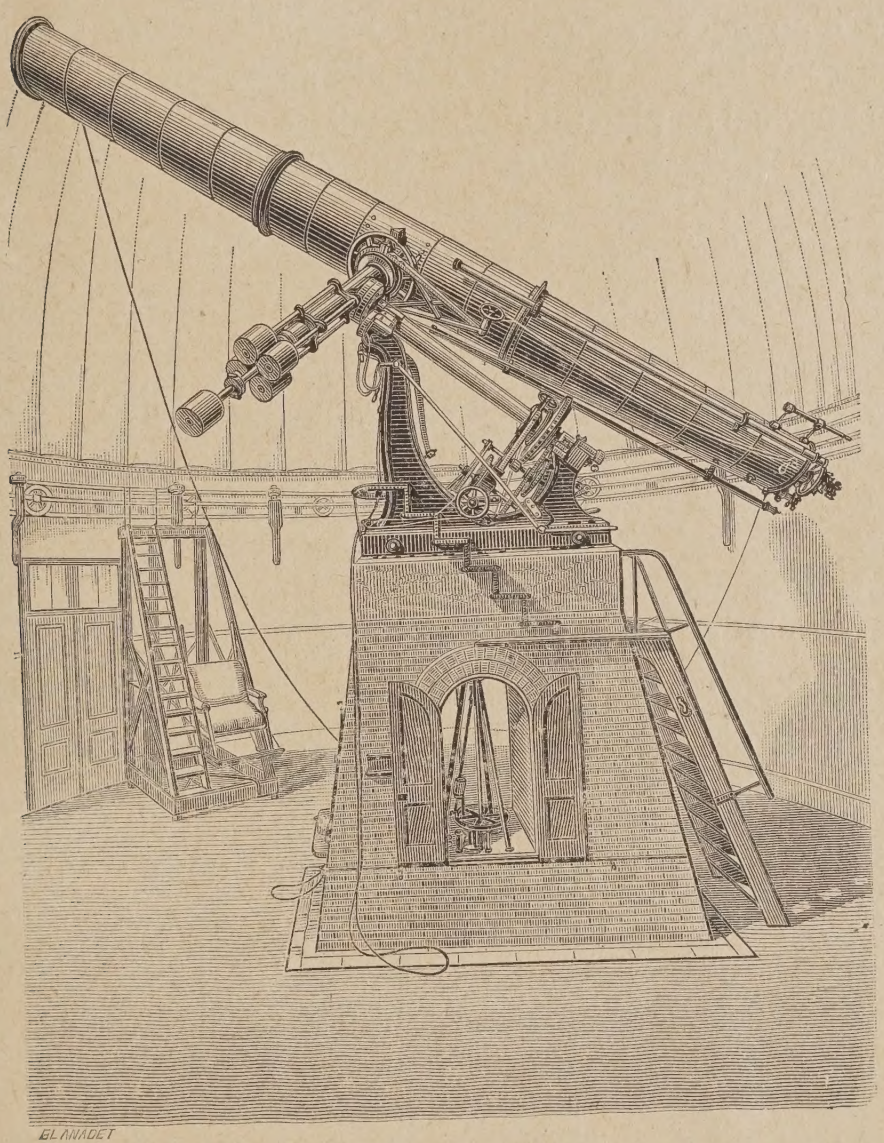
Ces étoiles constituent des points de repère pour toutes les

déterminations d'heure et de colatitude; elles servent aussi pour les observations extra-méridiennes des comètes et des petites planètes qui sont rarement observables à leurs passages au méridien. Enfin, elles sont utilisées également pour la détermination des $\mathcal{R}$ et des δ des autres étoiles, par des mesures différentielles.

Équatorial.

L'équatorial dont voici la figure, et qui est, comme on le voit,

Fig. 67.



un théodolite dont l'axe principal est dirigé suivant la ligne des pôles, permet d'observer ces astres dans une région quelconque

du ciel, pourvu qu'il s'y trouve des étoiles connues, pour servir de terme de comparaison. D'après la position même des axes de cet instrument, dont le principal est obliquement dirigé vers le pôle, le réticule de la lunette, prise dans une position quelconque, se projette sur le ciel suivant deux arcs de grand cercle rectangulaires, dont l'un est le méridien céleste du point visé, et l'autre est tangent au parallèle céleste de ce même point. Ils forment ainsi deux axes de coordonnées tout orientés pour les mesures des différences en A et en δ entre les étoiles dont on veut déterminer les coordonnées et les fondamentales visibles en même temps qu'elles dans le champ de la lunette. Ces mesures s'exécutent à l'aide d'un micromètre à fil mobile, par rapport aux axes que constituent les fils fixes du réticule dont l'un est parallèle et l'autre normal au plan du méridien céleste suivant lequel est dirigé l'instrument. Les mesures donnent évidemment

$$\delta' - \delta \quad \text{et} \quad (A' - A)\sin\delta',$$

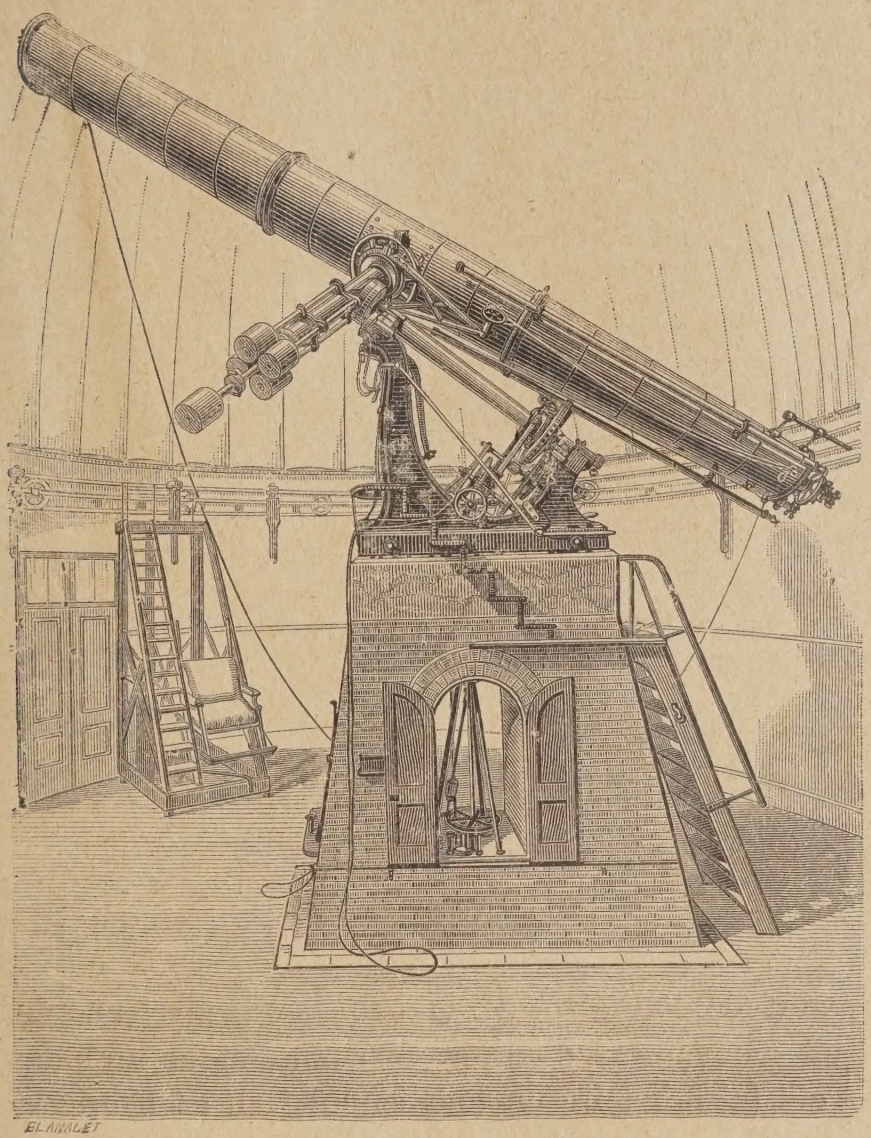
δ' et A' étant les coordonnées uranographiques de l'étoile fondamentale de comparaison.

Les équatoriaux servent aussi à la photographie du ciel, dont on a fait un si large usage pour l'établissement de la Carte du Ciel, ainsi qu'on le verra plus loin. Dans ce cas, l'oculaire de la lunette est remplacé par l'appareil photographique et la plaque sensible. Comme les poses nécessaires pour photographier les petites étoiles sont longues et peuvent dépasser 1 heure, il faut que l'instrument soit monté sur un équipage mû par un mouvement d'horlogerie qui lui permette de suivre l'étoile dans son mouvement, ou encore, afin d'éviter les vibrations, que, la lunette restant fixe, la plaque soit seule en mouvement et suive l'étoile. L'observateur corrige les petites irrégularités du mouvement d'horlogerie qui peuvent encore subsister, en maintenant constamment une étoile de la région du ciel que l'on photographie, à la croisée des fils du réticule d'un chercheur, dont l'axe optique est parallèle à celui de l'équatorial.

Quand on photographie un astre mobile sur la sphère céleste, planète ou comète, on règle le mouvement de la plaque sur celui de l'astre; les étoiles ont alors un mouvement relatif par rapport à la plaque et leurs images ont l'apparence de petites traînées

rectilignes. Inversement, quand on photographie une région de la sphère céleste dont la plaque suit le mouvement diurne, un astre

Fig. 68.



à mouvement propre, comme une petite planète, sera décelé par une petite trace rectiligne.

Sidérostat polaire.

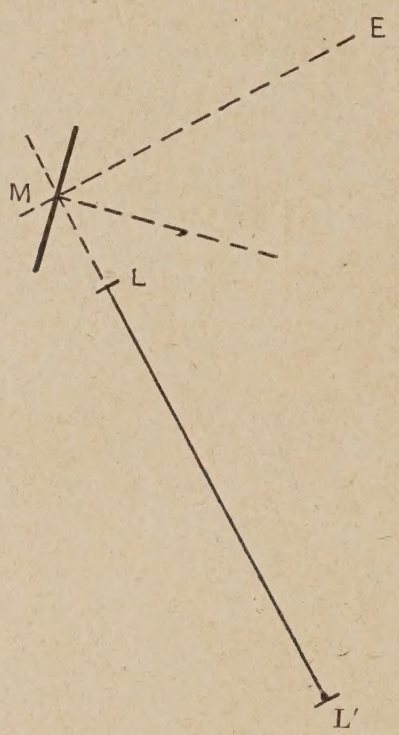
Nous avons donné plus haut une description succincte de l'équatorial et du mode d'observation à cet instrument. Le travail est assez pénible pour l'observateur qui a l'œil fixé à la lunette et est à chaque instant obligé de se déplacer pour suivre les mouvements

de l'instrument. L'astronome est assujetti en outre à prendre certaines positions très incommodes pour l'observation, lorsque, par exemple, il observe un astre vers le zénith.

On a imaginé d'autres dispositions qui évitent ces inconvénients, l'un d'eux est le *sidérostat polaire* (*fig* 69).

Imaginons une lunette fixe L'L, dirigée suivant l'axe du monde

Fig. 69.



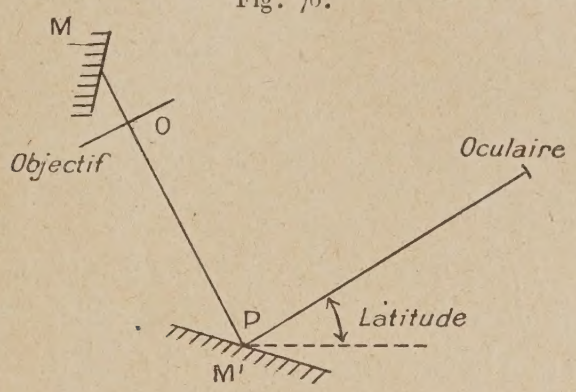
et en avant de l'objectif de laquelle se trouve un miroir M auquel un mouvement d'horlogerie communique un mouvement régulier qui lui fait faire un tour complet en 24 heures sidérales autour de l'axe optique de la lunette, c'est-à-dire autour de l'axe du monde. Les rayons émanant d'une étoile E se réfléchiront sur le miroir, et si ce dernier, qui peut être orienté en azimut et en inclinaison, est convenablement disposé, ils pénétreront dans la lunette et formeront au foyer de l'objectif une image de l'étoile.

L'observateur n'aura donc pas à se déplacer, puisque la lunette est fixe, et n'aura qu'à orienter convenablement le miroir et à mettre ensuite en mouvement le régulateur.

Équatorial coudé.

Cet instrument, imaginé par Lœwy, directeur de l'Observatoire de Paris, se compose d'une lunette brisée dont le tube porte-oculaire est fixe et dirigé suivant l'axe du monde, tandis que le tube porte-objectif est mobile et dirigé dans le plan de l'équateur, c'est-à-dire perpendiculairement au premier (*fig.* 70).

Fig. 70.



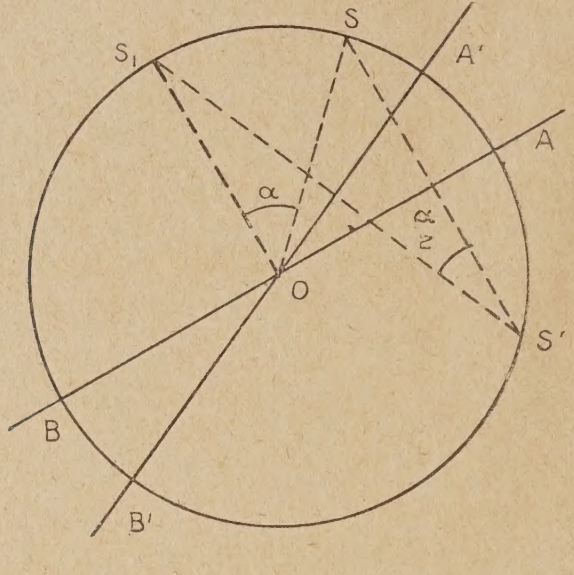
Le plan des axes des deux tubes réalise donc ainsi un plan horaire du ciel. Un miroir M incliné à 45° sur l'axe du tube porte-objectif et mobile autour de cet axe, renvoie dans la direction OP l'image des points du ciel situés dans un plan horaire perpendiculaire à celui défini par les deux axes. Ces images sont renvoyées ensuite à l'oculaire par un miroir M′ incliné à 45° sur les deux axes et placé à leur point de jonction. On observe ainsi les astres situés dans le plan horaire perpendiculaire à celui que définit la lunette coudée. Le miroir M′ est fixe; le miroir M, mis en mouvement par un régulateur, peut suivre le mouvement diurne.

Cœlostat.

Imaginons un miroir OA faisant un tour complet en 48 heures autour de l'axe du monde, projeté en O, perpendiculairement au plan de la figure 71. Le miroir tourne donc d'un angle $\frac{\alpha}{2}$ pendant

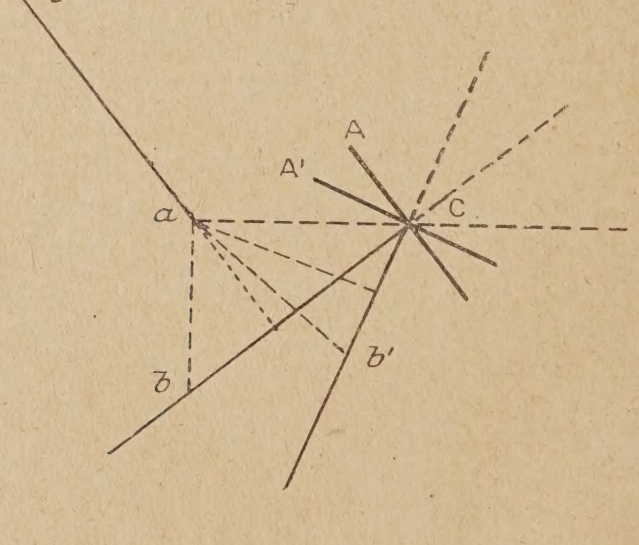
que la sphère céleste tourne d'un angle α. L'image S′ d'un astre S reste fixe et vue dans une direction constante.

Fig. 71.



L'instrument (*fig.* 72) se compose essentiellement d'un axe horaire B*a* parallèle à l'axe du monde, d'un miroir A pouvant tourner autour d'un axe horizontal projeté en C, et portant une tige *b*C fixée perpendiculairement à son plan. Cette tige s'emboîte dans un anneau porté par une fourchette *ab*, articulée en *a*, à l'extrémité

Fig. 72.



inférieure de l'axe horaire, et de longueur égale à *ac*, distance de l'axe d'articulation de la fourchette à l'axe de rotation du miroir. L'axe *ab* de la fourchette représentant la direction du rayon

incident, comme la longueur *ab* reste dans toutes les positions de la fourchette, égale à *ac*, cette direction *ac* est la direction du rayon réfléchi, qui reste ainsi constante.

On peut donc observer un astre, sans dérangement aucun, avec une lunette horizontale placée en avant du miroir pendant tout le temps qu'il sera au-dessus de l'horizon.

Ces trois instruments, comme on le voit, exigent l'emploi de miroirs. Or, ces derniers ne sont jamais rigoureusement dressés; de plus, ils sont sensibles aux variations de température et peuvent pour ces raisons donner des images troubles. Aussi, malgré les commodités qu'ils apportent aux observations, ils n'ont pas fait renoncer aux équatoriaux proprement dits.

Remarque. — Tous les instruments que nous venons de décrire appartiennent à la catégorie des *réfracteurs*. Il existe une autre catégorie d'instruments, les *réflecteurs*, où la lunette est remplacée par un miroir concave. On a alors ce que l'on appelle un télescope. Il n'y a plus de réfraction à travers la lentille, donc plus de dispersion, et l'achromatisme est parfait. On préfère cependant les réfracteurs aux réflecteurs, d'abord parce que l'observation est plus facile, mais surtout parce que les images qu'ils donnent sont meilleures. Les variations de température affectent en effet les parties optiques des instruments, qui ne sont pas des solides invariables. L'effet de ces variations est plus sensible sur les miroirs que sur les lentilles. Si, en effet, dans une lentille, une face est plus chauffée que l'autre, la lentille se comportera comme un thermomètre bimétallique de Bréguet, la courbure d'une des faces diminuera tandis que celle de l'autre face augmentera, de telle sorte qu'en appelant R et R′ les rayons des deux faces, la quantité $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}$ qui caractérise la lentille au point de vue optique, pourra rester à peu près constante et il y aura en quelque sorte compensation. Dans un miroir, au contraire, on n'utilise qu'une seule face et la variation de courbure due à l'effet de la température produit tout son effet.

Rôle des étoiles fondamentales.

On détermine, comme nous l'avons dit, les $\mathcal{R}$ et les δ d'un certain nombre d'étoiles qui serviront ensuite de repères pour les observations différentielles ou les mesures effectuées sur les clichés de la Carte du Ciel.

Parmi les étoiles servant de repère, il en est qu'on ne cesse jamais d'observer et dont les positions se trouvent aujourd'hui connues avec la plus extrême précision. Ce sont les étoiles fondamentales dont nous avons déjà parlé très souvent.

Dans la pratique journalière des observatoires, on ne saurait déterminer à tout instant les erreurs instrumentales avec la précision requise, et cependant les observations essentielles ne doivent jamais être interrompues. Pour satisfaire à ces conditions, l'astronome observe, en même temps que le Soleil, la Lune ou les planètes, plusieurs étoiles fondamentales qui se trouvent dans la même région céleste, ainsi qu'on l'a vu dans le spécimen donné plus haut des registres de l'Observatoire de Paris. Comme les erreurs instrumentales, toujours très faibles, affectent au même degré les astres observés et les étoiles de comparaison, ces erreurs disparaissent dans les différences. Le résultat ne dépend plus des instruments, mais de l'exactitude des fondamentales. Il en sera de même des petites étoiles qu'on aura observées ce jour-là dans la même région.

La détermination de ces étoiles fondamentales, dont la première institution régulière remonte à 4000 ans (Astronomie chinoise), est l'œuvre la plus délicate des grands observatoires. Elle exige, en premier lieu, une connaissance approfondie de toutes les causes naturelles qui font varier leurs coordonnées, les mouvements propres, la précession, la nutation, l'aberration et la parallaxe annuelle. Ajoutez-y la réfraction, quand il s'agit des distances polaires. Les erreurs instrumentales elles-mêmes, telles que la marche diurne de la pendule, l'inclinaison et l'orientation de l'axe de la lunette méridienne, les flexions, etc., doivent être étudiées avec un soin tout particulier. Or, ces erreurs n'ont pas toute la fixité qu'on leur suppose ordinairement; elles varient avec le temps, suivant des lois mal connues; elles dépendent principale-

ment des changements diurnes et annuels de la température. Malgré le soin qu'on met à les déterminer fréquemment, on ne peut avoir l'espoir d'en connaître la valeur exacte à tout instant.

Voici, pour fixer les idées, un exemple bien simple. Malgré la compensation du pendule de l'horloge astronomique, il y a tout lieu de croire qu'il y reste encore quelque défectuosité. Les variations diurnes et annuelles de la température doivent donc exercer une certaine influence sur la marche de l'horloge, marche que nous avons traitée comme une constante dans la formule

$$H = h + C_p + (t' - t)m.$$

Or, la température diurne présente une variation périodique susceptible d'être exprimée par le sinus de l'heure comptée à partir d'une certaine origine, c'est-à-dire par l'expression

$$\theta \sin(H - \alpha).$$

Comme $h = \text{Æ}$ au méridien, on voit que les ascensions droites des étoiles fondamentales, en les supposant déterminées par une série d'observations méridiennes espacées de vingt-quatre heures et réduites d'après la première formule, présenteront une anomalie, exprimée par la seconde, dont il est à peu près impossible de tenir compte directement. Cette anomalie, de nature sinusoïdale, aura pour effet de rapprocher les étoiles les unes des autres en ascension droite dans une certaine région du ciel, et de les écarter les unes des autres dans la région opposée.

Il n'y a qu'une manière d'éliminer une telle cause d'erreur, c'est de prendre, pour chaque étoile, la moyenne des Æ observées pendant une année entière. Comme le jour sidéral diffère d'environ $3^m 56^s$ du jour solaire, au bout d'une année, une étoile quelconque, observée chaque jour et ayant naturellement passé au méridien à la même heure sidérale, aura passé successivement au méridien à toutes les heures solaires. Or, l'anomalie en question, due aux variations de la température, se règle sur l'heure solaire et non sur l'heure sidérale; son influence sur l'Æ d'une étoile quelconque passera donc, en un an, par toutes les valeurs que peut prendre un sinus, valeurs dont la somme est rigoureusement nulle. Ainsi elles se neutraliseront complètement dans le cours d'une année. Il en sera de même de toutes les causes d'erreur ayant la même période

et, par exemple, du phénomène des parallaxes annuelles, d'une petite erreur sur la constante de l'aberration, etc.

Mais, pour suivre en toute saison et à toutes les heures solaires une étoile à ses passages au méridien d'un lieu quelconque, il faut qu'elle soit observée en plein jour aussi bien qu'en pleine nuit. On est donc obligé de choisir les étoiles fondamentales parmi les plus belles étoiles, de la première à la troisième grandeur. Autrefois les astronomes n'en avaient adopté que vingt. Leur nombre a été en croissant; aujourd'hui il y en a près de six cents, dont les positions sont calculées et publiées d'avance dans les éphémérides, en général de dix en dix jours. Mais celles qui ne peuvent être observées d'une manière continue, pendant le jour aussi bien que pendant la nuit, ne méritent pas véritablement le nom de *fondamentales*.

Ce que nous venons de dire des $\mathcal{R}$ compte pareillement pour les δ. La réfraction calculée a bien aussi ses variations provenant de causes météorologiques. On ne les élimine qu'en continuant d'observer pendant toute la période assignable à ces causes, c'est-à-dire pendant une année entière.

Enfin les étoiles ont leurs petits mouvements propres qu'on ne saurait déterminer qu'en comparant des observations faites à de grands intervalles de temps.

Carte photographique du Ciel.

Des progrès de la plus haute importance ont été réalisés depuis quelques années, vers 1885, dans la détermination des coordonnées $\mathcal{R}$ et δ des astres, par l'emploi de la photographie. Les nouveaux procédés ont été mis entièrement au point par deux astronomes français, MM. Paul et Prosper Henry, et l'on poursuit actuellement l'établissement d'un grand Catalogue qui comprendra les étoiles jusqu'à la 11^{e} grandeur. En outre de ce Catalogue, on établit à l'aide des clichés ce que l'on appelle la *Carte du Ciel*, par reproduction héliogravée des clichés sur lesquels on a pu obtenir, à l'aide de poses suffisamment longues, les images des étoiles jusqu'à la 14^{e} grandeur.

L'ensemble du travail s'exécute sous la direction d'un Comité international comprenant les directeurs des principaux observatoires du monde entier. Dix-huit observatoires, répartis sur

toute la surface du globe, ont été désignés pour prendre part à cet immense travail, chacun d'eux ayant dans son rayon d'action une région déterminée du ciel.

Les étoiles sont rapportées à des axes tracés sur les clichés. Les mesures se font à l'aide d'un microscope à micromètre spécial, au moyen duquel on évalue les distances des étoiles aux axes dans le sens du méridien céleste et dans le sens perpendiculaire, d'où l'on déduit les appoints $d\,A\,\sin\delta$ et $d\delta$ à ajouter aux coordonnées de l'origine pour avoir celles de chaque étoile. Les tambours du micromètre permettent l'évaluation du dixième de seconde d'arc.

Le Catalogue qui donne les positions jusqu'à la 11^{e} grandeur inclusivement, renferme environ 2 millions d'étoiles. La Carte du Ciel, qui donne les images d'étoiles jusqu'à la 14^{e} grandeur inclusivement, en renfermera environ 30 millions. On ne peut évidemment songer à mesurer et calculer toutes ces positions. C'est pourquoi on a décidé, pour la Carte, de reproduire simplement les clichés par héliogravure. C'est sur ces reproductions que l'on mesure, quand on le désire, les coordonnées des étoiles qui ne sont pas comprises dans le grand Catalogue.

Organisation des travaux d'un observatoire.

On voit combien sont nombreux et complexes les travaux d'un grand observatoire. Ils sont répartis par services, à la tête de chacun desquels est placé un astronome assisté d'adjoints. C'est ainsi qu'à l'Observatoire de Paris se trouvent : le Service méridien chargé de l'amélioration continuelle des coordonnées des étoiles; le Service de la Carte photographique du Ciel; le Service de l'heure, chargé de la détermination continuelle de la correction et de la marche de la pendule directrice, ainsi que de l'arrivée de l'heure au poste central de T. S. F. de la Tour Eiffel, qui l'envoie à son tour par des émissions d'ondes dans tout son rayon d'action; le Service des recherches de petites planètes et de nébuleuses; enfin des Services d'études particulières, sur les spectres des étoiles, leurs températures, etc., qui sont surtout du domaine de l'astronomie physique. Ajoutons qu'un Observatoire spécial, celui de Meudon, s'occupe exclusivement d'études d'astronomie physique.

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION ASTRONOMIQUE DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES D'UN LIEU.

La détermination astronomique des coordonnées géographiques d'un lieu est le problème que le géodésien doit résoudre pour déterminer les points fondamentaux de départ de ses triangulations; c'est aussi le problème journalier de l'explorateur et du marin.

Ces coordonnées sont λ et L. Comme $L = H - H_P$, il faut déterminer l'heure H du lieu. Quant à H_P, heure de Paris au même instant, nous la supposerons connue.

De plus, il ne suffit ni au géodésien, ni à l'explorateur, d'obtenir les coordonnées de la station : il leur faut encore s'orienter, c'est-à-dire déterminer avec plus ou moins d'exactitude la direction du méridien, origine des azimuts des signaux terrestres qu'il aura à viser.

Les instruments dont l'observateur aura besoin sont : un cercle méridien ou un théodolite bien rectifié et placé sur un pied en bois ou un pilier en pierre, un baromètre et un thermomètre pour le calcul des réfractions, enfin une pendule sidérale ou un chronomètre battant à peu près $86\,400^s$ par jour sidéral. Il lui faut, en outre, la *Connaissance des Temps*, éphéméride publiée chaque année par le Bureau des Longitudes, pour y prendre à vue les coordonnées uranographiques des étoiles dont il se servira.

Pour ces déterminations, quand on n'emploie pas le Soleil, il est utile de savoir reconnaître à vue les astres que l'on voudra observer.

Ces étoiles ont des noms propres qui sont marqués sur les Cartes célestes et dont on se sert dans les éphémérides. Pour se familiariser avec ces détails, on commence par chercher la constellation

de la Grande Ourse, toujours visible sous nos climats. Sur l'alignement des étoiles α et β de cette constellation, à cinq fois environ l'arc $\alpha\beta$, se trouve α de la Petite Ourse, ou la Polaire. De là, à l'aide d'une Carte céleste, et par des alignements indiqués sur cette Carte, on retrouve, de proche en proche, les principales étoiles dont il faut se rappeler les noms et parmi lesquelles on fera son choix. Les déterminations de l'heure et de la colatitude se font soit par des observations méridiennes, soit par des observations en dehors du méridien.

Les géodésiens emploient d'ordinaire les observations méridiennes pour la détermination des coordonnées fondamentales de leurs triangulations. Mais les observations méridiennes très précises exigent l'installation d'observatoires temporaires assez compliqués et nécessitent des opérations d'assez longue durée.

Les explorateurs et les marins, qui doivent pouvoir déterminer leur position à tout instant, emploient, suivant les circonstances, soit toutes les méthodes d'observation dans le méridien, en simplifiant les opérations, soit surtout, par la force même des choses, les méthodes d'observation en dehors du méridien; leurs installations sont nécessairement peu compliquées et leurs instruments aussi portatifs que possible : un théodolite placé sur son pied ou un sextant et un chronomètre.

Mais, dans tous les cas, que l'on emploie les observations extraméridiennes ou méridiennes, le premier point dont l'observateur devra se préoccuper sera d'obtenir rapidement des valeurs approchées des éléments qu'il se propose de déterminer plus tard avec précision, c'est-à-dire de l'heure, de la colatitude, de la direction du méridien.

Méthode des hauteurs correspondantes.

La méthode des hauteurs correspondantes fournit facilement et avec suffisamment d'exactitude ces éléments approchés.

La direction du méridien étant grossièrement indiquée par celle de l'étoile polaire, l'observateur choisira, à l'est de ce plan, une étoile qui en soit peu éloignée. Il dirigera la lunette sur cette étoile et, au moment du pointé, il notera l'heure h de la pendule. L'instrument étant fixé dans cette position, il lira la direction azimu-

tale u sur le cercle horizontal. Quant au cercle vertical, il suffit que les mâchoires soient serrées. Puis il attendra que l'étoile ait passé de l'autre côté du méridien et revienne à la même hauteur. Pour cela, il la suivra par le mouvement azimutal seulement de la lunette, sans déplacer celle-ci sur son propre limbe. Lorsque l'étoile aura atteint de nouveau la croisée des fils, il notera l'heure h' de la pendule, fixera l'instrument en azimut et lira de nouveau les verniers.

Soit u' cette seconde lecture. Comme le méridien du lieu est un plan de symétrie pour tous les phénomènes du mouvement diurne, $\frac{u'+u}{2}$ sera, sur le limbe horizontal, la direction du méridien ; $\frac{h+h'}{2}$ sera l'heure du passage de l'étoile par ce plan. L'étoile étant connue, on en prendra l'ascension droite $Æ$, pour la date de l'observation, dans la *Connaissance des Temps*, et, comme $Æ$, en temps, donne précisément l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien, on aura

$$Æ - \frac{h+h'}{2} = C_p$$

pour l'état de l'horloge; C_p sera la correction à ajouter à toutes les indications de cette horloge pour avoir l'heure sidérale.

Cela fait, on amènera le cercle vertical dans la direction du méridien $\left(\text{le vernier marquant } \frac{u'+u}{2}\right)$ et l'on y attendra le passage d'une étoile connue. On en mesurera la distance zénithale méridienne z_m, et, à l'aide du δ de cette étoile pris dans la *Connaissance des Temps*, on aura la colatitude λ par

$$\delta = \lambda + z_m,$$

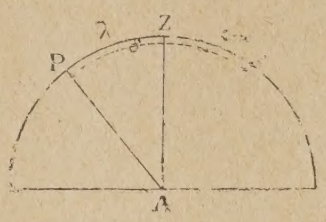
formule où l'on donnera à z_m le signe $+$ ou le signe $-$ selon que l'étoile se trouvera au sud ou au nord du zénith, et à δ le signe $\pm$ selon que l'étoile se trouvera au-dessus ou au-dessous du pôle. La figure 73 en rendra aisément compte.

Quand, au lieu d'une étoile, on emploie le Soleil ou une planète, il y a lieu de faire une correction, puisqu'en raison de leur mouvement propre, à des hauteurs égales à l'Est et à l'Ouest du méridien, ne correspondront plus des angles horaires égaux. La différentiation de l'équation

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos Æ,$$

où z et λ sont constants, donnera la variation de $\mathcal{H}$ pour une variation $d\delta$ de la distance polaire, pendant l'intervalle de

Fig. 73.



temps $t - t'$ compris entre les deux observations. On trouvera facilement :

$$d\mathcal{H} = \frac{d\delta}{15}\left[\cot\frac{1}{2}(t-t')\cot\delta - \frac{\cot\lambda}{\sin\frac{1}{2}(t-t')}\right],$$

où $t - t'$ doit être exprimé en arc.

La variation horaire de $d\delta$ est donnée par la *Connaissance des Temps*.

Observations extraméridiennes.

Nous nous occuperons tout d'abord des observations en dehors du méridien.

La solution générale du problème est donnée par la résolution du triangle sphérique ayant pour sommets le pôle, le zénith du lieu et l'astre observé.

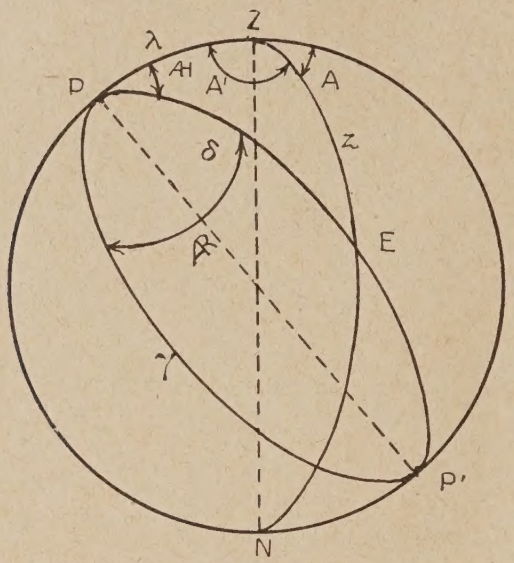
On a, en effet, dans ce triangle (*fig. 74*) :

PZ $= \lambda =$ colatitude ;
PE $= \delta =$ distance polaire de l'astre E ;
ZE $= z =$ distance zénithale de l'astre E ;
PZE $= A' =$ 180° moins l'azimut A de l'astre E ;
ZPE $= \mathcal{H} =$ angle horaire de l'astre E.

La donnée d'observation est la distance zénithale z ; δ et $\mathcal{R}$ (nécessaire ultérieurement pour déduire H de $\mathcal{H}$) sont connus et donnés par la *Connaissance des Temps*. Mais on voit que, pour calculer soit δ, soit $\mathcal{H}$, il faudra connaître un troisième élément du triangle. On serait donc dans l'impossibilité de résoudre le problème si l'on ne connaissait pas à l'avance des valeurs

approchées des éléments à déterminer et ceci conduit à chercher quelles sont, dans chaque cas, les conditions d'observation les

Fig. 74.



meilleures pour qu'une erreur sur l'élément estimé ait le moins d'influence possible sur l'élément à déterminer.

Circonstances favorables à la détermination exacte de l'heure et de la colatitude.

Reproduisons ici les équations fondamentales de la transformation des coordonnées :

$$(1) \qquad \cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \text{Æ H},$$

$$(2) \qquad \sin z \cos A = -\sin\lambda \cos\delta + \cos\lambda \sin\delta \sin \text{Æ H},$$

$$(3) \qquad \sin z \sin A = \sin\delta \sin \text{Æ H}.$$

Avec le théodolite, à un instant donné par la pendule, on mesure le z d'une étoile dont les coordonnées uranographiques Æ et δ sont connues; on en déduit, par l'équation (1), soit λ, soit Æ H, et par conséquent H. Comme l'observateur est maître du choix de l'étoile et de l'instant de l'observation, il doit, avant tout, se préoccuper de choisir les circonstances favorables à l'exacte détermination des inconnues. Différentions l'équation (1) par rapport à z, λ et Æ H. Quand à δ et Æ, ce sont des données d'une très grande exactitude, qui résultent des observations antérieures des astro-

nomes. Il vient ainsi

$$-\sin z\,dz = (-\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos\text{Æ H})\,d\lambda - \sin\lambda\sin\delta\sin\text{Æ H}\,d\text{Æ H}.$$

Cette relation, comparée à (2) et à (3), se réduit à

$$dz = -\cos A\,d\lambda + \sin\lambda\sin A\,d\text{Æ H}. \tag{4}$$

S'il s'agit de déterminer l'heure, on aura

$$d\text{Æ H} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda\,\operatorname{tang} A} + \frac{dz}{\sin\lambda\sin A}$$

(en divisant par sin A, on suppose que A n'est ni 0° ni 180°). Cette erreur sera minimum si A = 90° ou 270°; en d'autres termes, une erreur commise sur λ n'aura aucune influence sur l'heure, et une erreur sur z aura la moindre influence sur l'heure si l'astre choisi se trouve à 90° du méridien, à l'Ouest ou à l'Est, c'est-à-dire près du deuxième ou du quatrième vertical.

S'il s'agit de la colatitude, on tire de (4), en divisant par cos A, ce qui suppose que A n'est ni 90° ni 270°,

$$d\lambda = \sin\lambda\,\operatorname{tang} A\,d\text{Æ H} - \frac{dz}{\cos A}.$$

Cette erreur est donc indépendante de celle de l'heure employée, et aussi peu dépendante que possible de celle de la distance zénithale, si l'on fait choix d'un astre situé dans le méridien, ou très près de ce plan.

1° *Détermination de l'heure.* — On a mesuré, par une double opération, aux heures très voisines h et h' de la pendule, la distance zénithale du Soleil ou d'une étoile près du deuxième ou du quatrième vertical, h répondant à la première observation cercle à droite, h' à la seconde, cercle à gauche. On a noté en même temps les indications du niveau dans les deux positions et celles du baromètre et du thermomètre. On est donc en état d'en conclure : 1° la distance zénithale apparente z_1; 2° la distance zénithale vraie $z = z_1 + \rho$. Dès lors, (1) donnera

$$\cos\text{Æ H} = \frac{\cos z - \cos\lambda\cos\delta}{\sin\lambda\sin\delta},$$

ou, si l'on veut une formule calculable par logarithmes,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\text{Æ H} = \pm\sqrt{\frac{\sin(s-\lambda)\sin(s-\delta)}{\sin s \sin(s-z)}},$$

en posant $2s = \delta + \lambda + z$. On prendra le signe + si l'astre observé est à l'Ouest, le signe — s'il est à l'Est. Æ H ayant été calculé par cette formule et exprimé en temps, on aura

$$\text{H} = \text{Æ R} + \text{Æ H}.$$

Par conséquent, la correction C_p de la pendule sidérale ou du chronomètre au moment moyen de l'observation sera (page 204)

$$\text{H} - \frac{h+h'}{2} = C_p.$$

Dans le calcul de cette formule, on pourra employer une valeur approchée de λ, pourvu que l'observation ait été faite dans les conditions susdites.

Par cette manière de procéder, on admet tacitement que la distance zénithale conclue de deux opérations faites aux heures très voisines h et h' de l'horloge répond bien à la moyenne des heures $\frac{h+h'}{2}$. Cela suppose que, dans ce court intervalle, la variation de z est proportionnelle au temps. C'est ce qui aura lieu effectivement, d'après (4), si l'étoile a été prise à 90° à peu près du méridien, car alors on a sensiblement

$$dz = \sin\lambda \, d\text{Æ H}.$$

2° *Détermination de la colatitude.* — Cette fois, il faut choisir un astre situé très près du méridien. Soit z sa distance zénithale conclue, comme d'ordinaire, des deux observations cercle à droite et cercle à gauche, aux heures sidérales désormais connues H et H′. Supposons que z ait été dûment corrigé de la réfraction et portons-en la valeur dans (1); on en conclura la valeur de λ. Comme λ y figure à la fois sous les signes sinus et cosinus, le moyen qui se présente le premier à l'esprit est de recourir à des quantités auxiliaires m et φ, en posant

$$\cos\delta = m\cos\varphi,$$
$$\sin\delta\cos\text{Æ H} = m\sin\varphi,$$

d'où l'on conclut m et φ, et par suite λ, par

$$\cos z = \cos(\lambda - \varphi).$$

Comme λ n'est déterminé que par le cosinus de $\lambda - \varphi$, il y aurait ambiguïté; mais celle-ci disparaît dans la pratique, si l'observateur a eu soin d'obtenir une valeur approchée de λ. On prendra pour $\lambda - \varphi$ l'arc qui donne à λ une valeur voisine de cette première approximation.

Cette solution est générale; elle s'applique donc au cas où l'on a choisi un astre dans une position quelconque. Mais, comme l'observateur a dû le choisir près du méridien, H est très petit et l'on en profite pour simplifier le calcul. Soit z_m la distance zénithale telle qu'on l'aurait obtenue si l'observation avait été faite dans le méridien même. Dans ce cas, on aurait λ par la formule bien simple

$$\delta - \lambda = z_m.$$

Dès lors, en remplaçant $\cos H$ par $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}H$ et $\delta - \lambda$ par z_m, l'équation (1) devient

$$\cos z = \cos z_m - 2\sin\lambda\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}H,$$

ou encore

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_m) = \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)}\sin^2\tfrac{1}{2}H,$$

où l'on peut remplacer le sinus du petit arc $\frac{1}{2}(z - z_m)$ par l'arc lui-même en écrivant

$$z - z_m = 206265'' \frac{2\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)}\sin^2\tfrac{1}{2}H,$$

ou

$$z - z_m = \frac{2\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)} \times \frac{\sin^2\frac{1}{2}H}{\sin 1''}.$$

Cette formule contient les inconnues λ et z_m dans le second membre; mais, comme $\sin^2\frac{1}{2}H$ est très petit, il sera permis d'employer dans le calcul une valeur simplement approchée de λ et de remplacer $\sin\frac{1}{2}(z + z_m)$ par $\sin z$. Le petit arc $(z - z_m)$, qu'on en déduit en calculant à trois ou à quatre décimales seulement, se nomme *réduction au méridien*; en l'ajoutant au z observé, on obtiendra z_m, et par suite λ. Quant à H, angle horaire de l'étoile

au moment de l'observation, on le calcule par

$$H = \mathcal{H} + \mathcal{R},$$

l'heure H étant donnée par $\frac{h+h'}{2} + C_p$, car la correction C_p de la pendule a été déterminée antérieurement.

Ici se présente une remarque analogue à celle du précédent paragraphe. La distance zénithale z résulte de deux pointés exécutés aux heures h et h' de la pendule : est-il permis de conclure que ce z répond bien à la moyenne des heures $\frac{h+h'}{2}$? Très près du méridien, la variation de z est, comme on le voit, proportionnelle, non plus au temps, mais au carré du temps ou à $\mathcal{H}^2$. Il faudrait donc, en toute rigueur, calculer la réduction au méridien $z - z_m$ pour les deux pointés et appliquer la moyenne de ces résultats au z observé; mais, si l'intervalle $h' - h$ des deux pointés est très petit, l'erreur résultant du premier mode est négligeable.

L'observateur ne doit pas se borner à une seule mesure de z; il multipliera ces mesures sur la même étoile, sans s'écarter beaucoup du méridien (autrement l'erreur possible de l'heure interviendrait dans les résultats), et réduira chaque observation de la même manière. L'accord de ces déterminations diverses lui permettra de juger du degré de précision obtenu pour la colatitude conclue.

Il y existe d'autres méthodes pour déterminer la colatitude; nous en décrirons brièvement deux, à titre d'exemple.

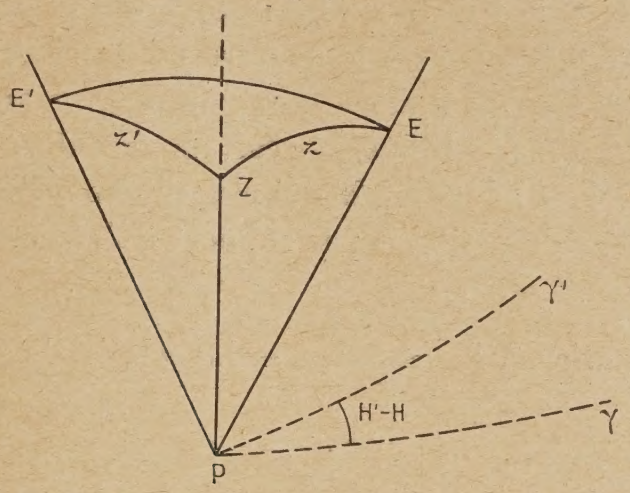
Méthode de Douwes. — Elle élimine l'erreur qui peut exister sur $\mathcal{H}$ (*fig.* 75).

Observons à l'heure H du chronomètre la distance zénithale d'un astre E, à l'heure H′ la distance zénithale d'un autre astre E′. Dans l'intervalle de temps H′ — H, le plan horaire de l'astre E a décrit un angle H′ — H en vertu du mouvement diurne. Mais nous pouvons supposer que E reste immobile pendant cet intervalle de temps, en lui appliquant un mouvement égal et de sens inverse, ce qui revient à attribuer à l'astre E, à l'instant H′, une ascension droite $\mathcal{R} - (H' - H)$. L'angle EPE′ est alors :

$$EPE' = \mathcal{R}' - \mathcal{R} + (H' - H).$$

On peut donc, dans le triangle EPE′ où PE $= \delta$ et PE′ $= \delta'$ sont donnés, calculer EZ, ainsi que les angles en E et E′.

Fig. 75.



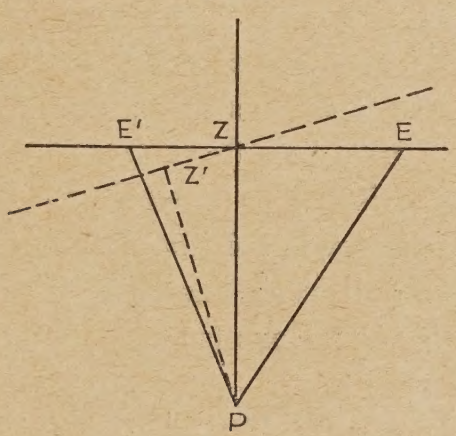
Le triangle EZE′, où les trois côtés sont actuellement connus, donne les angles EE′Z et E′EZ. On pourra ainsi calculer

$$ZP = \lambda,$$

avec une vérification, par les deux triangles EZP et E′ZP.

Méthode de Bessel. — Elle consiste à observer les instants du passage de deux étoiles par le premier vertical, c'est-à-dire

Fig. 76.

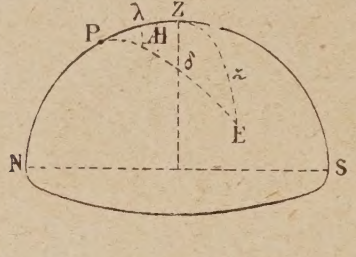


par le plan vertical perpendiculaire au plan méridien. Cette méthode n'exige pas la mesure des distances zénithales et élimine ainsi, en outre de l'incertitude sur ΔH, la correction de réfraction.

On note les instants H et H′ des passages des deux astres E et E′ par le plan EZE′ perpendiculaire au méridien. L'angle EPE′ est connu, comme dans la méthode précédente, et l'on connaît également PE $= \delta$, PE′ $= \delta'$. Le triangle EPE′ est donc déterminé et la colatitude PZ est la hauteur de ce triangle. Une petite erreur d'orientation de l'instrument par rapport au premier vertical sera sans grande influence, car, au lieu de la hauteur PZ, on déterminerait la hauteur PZ′ qui n'en diffère que d'une quantité du second ordre de petitesse par rapport à l'erreur d'orientation.

3° *Détermination de l'orientation.* — La colatitude et la correction

Fig. 77



de la pendule ou du chronomètre étant bien connues, il ne reste plus qu'à déterminer la direction du méridien. Pour cela, on observe, à l'aide du théodolite, l'azimut provisoire (compté à partir du zéro de la division du limbe horizontal placé dans une position quelconque) d'un astre connu. Soient u la division qui répond au vertical de l'astre à l'instant H donné par la pendule, et A l'azimut réel de cet astre à cet instant : u — A sera la division à laquelle répondra le méridien (le point sud), et si l'on amène l'alidade sur cette division, la lunette, en tournant autour de son axe horizontal, décrira le méridien. Il ne reste donc plus qu'à calculer l'azimut que doit avoir l'astre à l'instant H. En divisant membre à membre les équations (2) et (3), on a

$$\cot A \sin \mathit{H} = -\sin\lambda \cot\delta + \cos\lambda \cos \mathit{H}, \tag{1}$$

équation analogue, sauf le signe de cot A, à une catégorie d'équations des triangles sphériques. H, λ, δ étant connus, cette relation donnera l'azimut cherché A.

On peut également appliquer les analogies de Neper. Appe-

lons E l'angle à l'astre dans le triangle PZE, nous aurons :

$$\operatorname{tang}\frac{A-E}{2} = \frac{\sin\frac{\delta-\lambda}{2}}{\sin\frac{\delta+\lambda}{2}}\cot\frac{\text{Æ}H}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{A+E}{2} = \frac{\cos\frac{\delta-\lambda}{2}}{\cos\frac{\delta+\lambda}{2}}\cot\frac{\text{Æ}H}{2},$$

d'où A — E et A + E et par conséquent A.

Pour apprécier les conditions d'exactitude, différentions la relation (1) par rapport à A et à Æ H = H — Æ R. Il vient ainsi :

$$-\frac{dA}{\sin^2 A}\sin \text{Æ}H + \cos \text{Æ}H \cot A\, d\text{Æ}H = -\cos\lambda \sin \text{Æ}H\, d\text{Æ}H.$$

On en tire, en multipliant les deux membres par sin A,

$$\frac{\sin \text{Æ}H}{\sin A}\, dA = (\cos A \cos \text{Æ}H + \sin A \sin \text{Æ}H \cos\lambda)\, d\text{Æ}H.$$

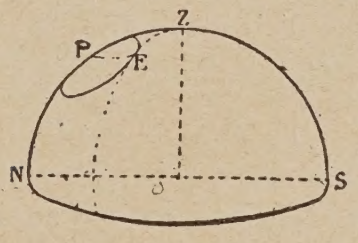
Le facteur entre parenthèses n'est autre chose que le cosinus de l'angle E du triangle PZE.

On a, en effet, par la formule (5) de la page 60,

$$\cos E = -\cos A \cos \text{Æ}H + \sin A \sin \text{Æ}H \cos\lambda,$$

et, en observant que, pour les coordonnées sphériques, A est le

Fig. 78.



supplément de l'angle A du triangle PZE,

$$\cos E = \cos A \cos \text{Æ}H + \sin A \sin \text{Æ}H \cos\lambda.$$

Donc

$$dA = \frac{\sin A}{\sin \text{Æ}H}\cos E\, d\text{Æ}H = \frac{\sin\delta}{\sin z}\cos E\, d\text{Æ}H.$$

L'incertitude de l'angle horaire H ou de l'heure H aura donc d'autant moins d'effet que l'angle E sera plus voisin de 90°.

Cet angle E, auquel on donne le nom d'*angle de position*, ne peut être droit que pour les étoiles circumpolaires. Il y aura donc tout avantage à observer une de ces étoiles dans la position E de la figure 78, c'est-à-dire lorsque le cercle de hauteur ZE est à peu près tangent au parallèle diurne décrit par l'étoile.

En général, on mesure la différence d'azimut entre un signal éloigné et une étoile circumpolaire en notant l'heure H, et l'on ajoute à cet angle l'azimut calculé de l'étoile, à l'heure H, pour avoir l'azimut absolu du signal.

Observations méridiennes.

Ce sont, comme nous l'avons dit, celles employées par les géodésiens pour la détermination des coordonnées fondamentales des triangulations. Elles se font à l'aide du cercle méridien portatif (*fig.* 66) qui peut être utilisé soit comme lunette méridienne en enlevant le porte-microscope, pour la détermination de la correction de pendule, soit comme cercle méridien, pour la détermination des latitudes.

1° *Détermination de la latitude.* — La détermination de la latitude par les observations méridiennes résulte, comme on l'a vu déjà, de la relation

$$\lambda = \delta - z_m,$$

qui est générale, à condition de donner à z_m le signe + ou le signe —, selon que l'étoile se trouvera au sud ou au nord du zénith, et à δ le signe + ou — suivant que l'étoile se trouvera entre le pôle et le zénith ou entre le pôle et l'horizon Nord.

La graduation correspondant au zénith se détermine par une observation du nadir, en ajoutant 180° au résultat trouvé : soit alors, comme on l'a vu déjà, u_0 la lecture du cercle quand la lunette est pointée sur le zénith, u la lecture correspondant à la visée à l'étoile, ε_0 et ε les erreurs des traits correspondants : on aura

$$z = u - u_0 + \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Supposons que nous observions une étoile culminant au sud du zénith, le cercle porte-microscopes étant à l'Ouest, c'est-à-dire à droite de l'observateur; nous aurons, en appelant ρ la correction de réfraction et f la correction de la flexion :

$$\lambda = \delta - (u - u_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 + \rho - f);$$

retournons le cercle méridien à l'aide de l'appareil de retournement de façon que le cercle porte-microscopes soit à l'Est, et observons une étoile de distance polaire δ', culminant au nord du zénith et ayant même distance zénithale que la précédente; toutes les conditions seront restées les mêmes; l'observateur se trouvera à la même place par rapport à l'instrument, les lectures au nadir (donc au zénith) et à l'étoile seront les mêmes, les effets de la réfraction et de la flexion n'auront pas changé; on aura, dans cette seconde position :

$$\lambda = \delta' + [u - u_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 + \rho - f],$$

d'où

$$\lambda = \frac{\delta + \delta'}{2},$$

indépendamment de toutes les causes d'erreurs.

L'application stricte de la méthode consisterait donc à observer des paires d'étoiles culminant l'une au nord, l'autre au sud du zénith, les étoiles de chaque paire étant de même distance zénithale, en retournant chaque fois le cercle entre les deux observations.

On simplifie ce procédé par trop long et compliqué en établissant une atalogue avec un certain nombre d'étoiles culminant toutes près du zénith pour atténuer le plus possible les effets de la réfraction, mais dont la moitié culminera au sud, l'autre moitié au nord du zénith, et telles que la moyenne des distances zénithales des étoiles Nord soit très sensiblement égale à la moyenne des étoiles Sud.

On observera alors les étoiles de ce catalogue, l'observateur face au Sud, dans l'une des positions du cercle porte-microscopes; on fera le retournement et l'on recommencera les observations le lendemain, dans la seconde position du cercle, l'observateur faisant face au Nord. Dans les observations très précises, on applique en outre la méthode de la réitération, en faisant un

certain nombre de séries d'observations, où l'on change d'origine à chacune d'elles.

C'est la méthode dite de Villarceau.

La pratique des observations au nord et au sud du zénith pour éliminer le plus possible de causes d'erreurs, a été pratiquée déjà lors des grandes opérations géodésiques de la fin du XVIII^e siècle et c'est même ainsi que les géodésiens ont découvert l'erreur constante introduite par la répétition dans la mesure des distances zénithales, surtout lorsque l'instrument commence à s'user. Cette erreur a pour effet, comme on l'a vu, d'altérer dans le même sens toutes les distances zénithales. Supposons celles-ci trop fortes d'une quantité α à une certaine distance du zénith : on aura, pour la colatitude conclue d'une étoile au Sud,

$$\delta - (z_m + \alpha) = \lambda - \alpha,$$

et, pour une étoile au Nord située à pareille distance du zénith,

$$\delta' + (z'_m + \alpha) = \lambda + \alpha.$$

Effectivement, les cercles répétiteurs donnent en général des colatitudes différentes suivant qu'on observe au Nord ou au Sud. On a cherché à éliminer l'erreur en prenant la moyenne des deux résultats; mais cela suppose que les deux erreurs, au Nord et au Sud, sont égales, ce qui n'est nullement certain.

2° *Détermination de l'heure et de la correction de pendule.* — La détermination de l'heure locale à l'aide des instruments méridiens portatifs se fait par la même méthode que celle que nous avons étudiée en détail à propos de la lunette méridienne en usage dans les observatoires.

L'instrument est installé sur un très solide pilier en maçonnerie et mis aussi exactement que possible dans le méridien, en appliquant la formule de Mayer. L'azimut résiduel, l'inclinaison et la collimation doivent être réduits autant que possible et vérifiés très souvent, afin que l'on puisse suivre leurs petites variations, l'instrument étant forcément moins stable qu'une lunette méridienne de grand observatoire.

Une détermination précise de la correction et de la marche d'une

pendule ou d'un chronomètre comporte plusieurs soirées d'observations, quatre ou six en général.

Ayant alors déterminé la correction de pendule C_p à l'instant moyen de chaque soirée, on détermine la marche, connaissant deux valeurs de C_p séparées par un intervalle de temps $t' - t$:

$$m = \frac{C'_p - C_p}{t' - t},$$

et l'on pourra suivre ainsi les petites variations de la marche dont on ne peut jamais s'affranchir.

De l'ensemble de la discussion des divers résultats, on pourra conclure l'état absolu de la pendule à un instant quelconque, c'est-à-dire la correction absolue à apporter, à cet instant, à l'indication de la pendule pour avoir l'heure sidérale.

3° *Détermination de la longitude.* — L'heure H_A du lieu A ayant été ainsi déterminée avec une grande précision, il nous suffira de connaître l'heure de Paris H_P au même instant pour obtenir la longitude par rapport à Paris, par la formule :

$$L = H_A - H_P.$$

La comparaison au même instant physique de H_A et de H_P a été longtemps un problème difficile. Il existe pour le résoudre trois moyens fort différents : 1° le transport de l'heure à l'aide de chronomètres bien réglés sur l'heure de Paris avant le départ de l'observateur; 2° l'observation de certains phénomènes astronomiques instantanés, dont l'apparition est connue en heure de Paris; 3° la transmission de l'heure de Paris par le télégraphe électrique si l'on dispose d'une ligne, ou par la télégraphie sans fil, si l'on dispose à la station A d'un appareil récepteur.

C'est pour résoudre ce problème par la première méthode que l'horlogerie de précision a été si ardemment cultivée depuis deux siècles; c'est pour l'emploi de la seconde méthode que l'on a poussé si loin la théorie de la Lune.

Aujourd'hui l'utilisation de la télégraphie sans fil a tellement simplifié le problème que l'on peut dire qu'il l'a révolutionné. Nous allons décrire succinctement la méthode que l'on emploie.

Ce que nous avons dit de l'heure H_P de Paris, s'applique évi-

demment à l'heure H_B d'une station B par rapport à laquelle on veut déterminer la longitude de la station A. Le problème de la détermination de la différence de longitude entre les stations A et B revient à celui de la comparaison au même instant physique des heures locales des deux stations A et B.

Cette comparaison est basée sur l'emploi de la méthode des coïncidences, utilisée depuis longtemps dans le vernier et que deux savants français, MM. Claude et Driencourt, ont étendue à la comparaison à distance des heures de deux pendules.

Le principe est le suivant. Supposons que l'une des pendules soit réglée de telle façon que les battements de son balancier soient plus courts d'un centième de seconde que ceux du balancier de l'autre pendule; en d'autres termes, que le balancier de l'une battant la seconde, le balancier de l'autre batte une seconde moins un centième. Un observateur qui percevra à l'oreille simultanément les battements des deux pendules entendra les battements successifs de l'une et de l'autre se rapprocher, coïncider, se séparer, s'éloigner pour se rapprocher de nouveau et ainsi de suite. Si l'observateur, par un procédé quelconque, a pu noter l'heure, la minute et la seconde, indiquées par chacune des pendules au moment d'une coïncidence, le résultat donnera la comparaison des deux pendules à un centième de seconde près.

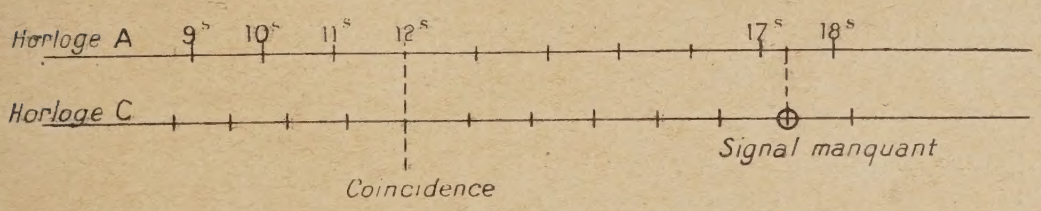
Voici comment on a appliqué ce principe à la détermination des longitudes par T. S. F. Les stations A et B dont on veut déterminer la différence de longitude disposent chacune d'une pendule locale dont on a déterminé les corrections. Chacune des stations comporte une antenne et un appareil récepteur de signaux de T. S. F. comprenant un casque téléphonique, intercalée en même temps dans le circuit d'un microphone placé sur la pendule. L'observateur coiffé du casque entendra donc à la fois les signaux transmis par l'antenne et les battements de la pendule locale, signaux qu'il lui sera facile de numéroter en les faisant appeler par un aide-opérateur.

En une troisième station C, qui peut être complètement indépendante des stations A et B, se trouve installée une pendule dont le balancier bat la seconde moins un centième. Ce balancier commande, à l'aide d'un dispositif convenable, un appareil émetteur de T. S. F. qui, à chaque oscillation du balancier, envoie,

par l'antenne d'émission de la station, des ondes hertziennes reçues par les antennes réceptrices des stations A et B. Un dispositif spécial empêche l'émission du train d'ondes à chaque soixantième battement du balancier.

L'opérateur de la station A, par exemple, coiffé du casque téléphonique, entendra à la fois les battements de l'horloge locale (battant la seconde) et ceux de la pendule de C (battant une seconde moins un centième). Il notera la seconde de la pendule A correspondant à la coïncidence avec un battement émis par C, puis comptant toujours les secondes de sa pendule locale, il notera les deux secondes qui encadrent l'intervalle où la pendule C n'a pas envoyé de battement.

Fig. 79.



Sur l'exemple de la figure, l'observateur A aura noté : coïncidence à H heures, M minutes, 12 secondes; signal manquant entre 17 et 18 secondes. Soient N_c la seconde correspondant à la coïncidence, N la plus forte des secondes qui encadrent le signal manquant; le battement qui aurait correspondu à ce dernier se serait produit à

$$H + M + N - (N - N_c)\frac{1}{100},$$

soit ici à

$$H + M + \left(18^s - \frac{6}{100}\right) = H + M + 17^s,94\ (^1).$$

On aura fait la même opération à la station B, d'où la comparaison très précise des heures des deux pendules, à l'instant correspondant au battement qui n'a pas envoyé de train d'ondes.

On fait toujours l'envoi de plusieurs groupes de signaux de C,

---

(1) Sur la figure 79, on a exagéré, pour plus de clarté, la différence entre la longueur des battements des deux horloges; cette différence atteint ici $\frac{1}{10}$ au lieu de $\frac{1}{100}$ comme dans le calcul précédent.

afin de parer aux observations incertaines et chaque groupe renferme un nombre déterminé de battements sans envoi d'ondes.

Il semble, au premier abord, que l'on pourrait augmenter indéfiniment la précision en resserrant l'intervalle entre la valeur des battements de C et celle des battements de seconde des pendules locales. Mais, au delà d'une certaine limite, de même que dans le vernier ordinaire plusieurs traits consécutifs paraissent en coïncidence, il devient difficile à l'oreille de discerner avec exactitude la seconde qui correspond à la coïncidence et l'on hésite entre plusieurs d'entre elles. On a alors dépassé la limite de précision possible.

L'emploi de la T. S. F. a permis de généraliser le problème de l'envoi de l'heure précise d'un méridien initial. Les divers grands observatoires envoient actuellement, chaque jour, à des instants annoncés, l'heure de leur méridien précédée de signaux spéciaux qui évitent toute confusion. Les navires en mer, les explorateurs, pourvu qu'ils soient pourvus d'une antenne réceptrice et qu'ils aient déterminé les corrections de leurs chronomètres pour avoir l'heure locale, peuvent donc déterminer leur différence de longitude avec un méridien initial, sous la seule condition d'être dans le rayon d'action d'un poste émetteur.

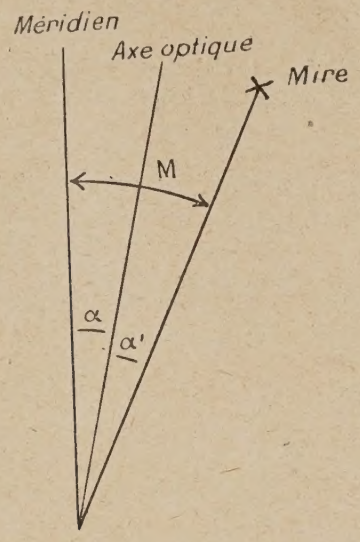
La T. S. F. a donc, comme on le voit, perfectionné considérablement la détermination de la longitude, encore si délicate et si difficile il y a peu d'années. A ces travaux et à ces solutions nouvelles se rattache le nom d'un savant français, le général Ferrié.

4° *Détermination de l'azimut d'un signal.* — La détermination très précise de l'azimut du premier côté d'une triangulation se fait à l'aide de la lunette méridienne, installée à l'une des stations extrémités du côté. On détermine, par la méthode que nous avons exposée, la constante n de la formule de Bessel, d'où l'on déduit l'azimut instrumental α, connaissant l'inclinaison β.

On a installé dans la direction du méridien, ou dans une direction qui en diffère très peu, une mire constituée soit par un signal lumineux très lointain, soit par un collimateur, et l'on mesure au fil mobile du micromètre la distance angulaire α' de la croisée des fils du micromètre à l'image de la mire.

On obtient ainsi l'azimut $M = \alpha + \alpha'$, de la mire par rapport au méridien.

Fig. 80.



Il ne reste plus alors qu'à substituer un théodolite ou un cercle azimutal au cercle méridien et à mesurer l'angle entre la mire et le signal situé à l'extrémité opposée du côté géodésique.

Détermination simultanée de l'heure et de la colatitude par la méthode des hauteurs égales d'étoiles. Astrolabe à prisme.

Le principe de cette méthode, due à Gauss, est le suivant : Considérons trois étoiles, dont on connaît les $\mathcal{R}$ et les δ, et notons les instants de leurs passages par un même petit cercle de la sphère céleste, ayant le zénith comme centre, mais dont le rayon peut être inconnu. On aura, pour chaque étoile, une relation de la forme

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos(H - \mathcal{R}),$$

H étant l'heure sidérale à l'instant du passage de l'étoile par le petit cercle.

Supposons la marche m du chronomètre ou de la pendule connue, mais son état inconnu, et soit C_{p_0} cet état à un instant origine T_0; l'heure sidérale H se mettra sous la forme, en appelant T l'instant de passage noté au chronomètre :

$$H = T \pm C_{p_0} \pm m(T - T_0),$$

m étant la marche, supposée connue, et la relation deviendra

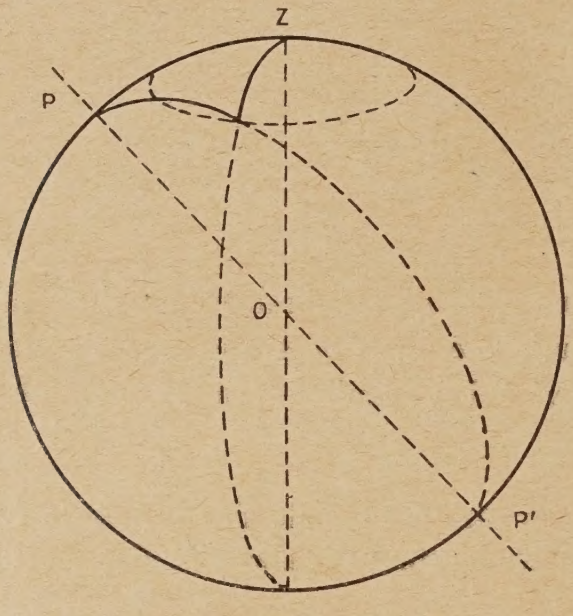
$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos[T - \mathcal{R} + C_{p_0} + m(T - T_0)],$$

où les inconnues sont z, λ et C_{p_0}.

Trois observations seront donc suffisantes pour déterminer les inconnues.

Si le nombre des observations est supérieur à trois, l'ensemble

Fig. 81.



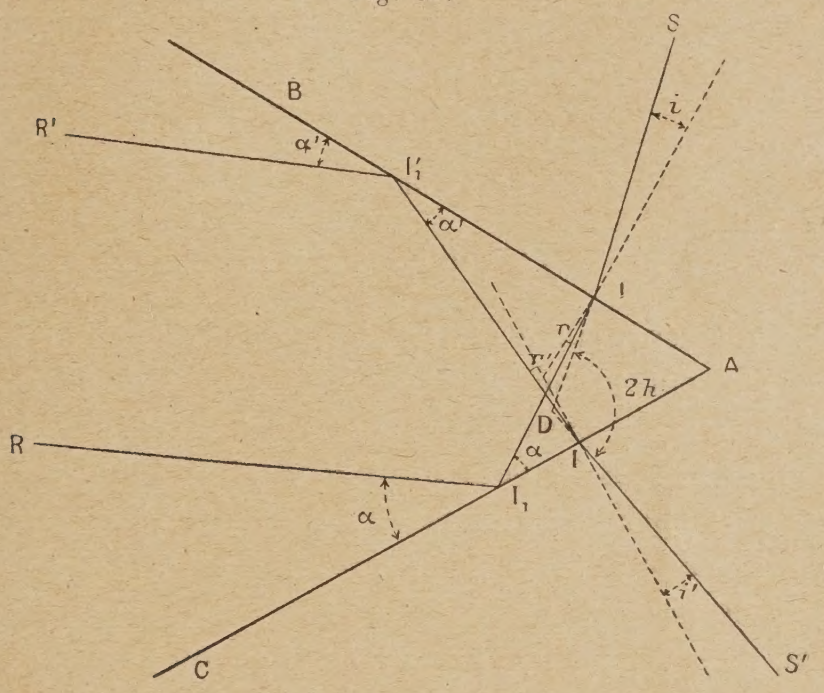
des équations obtenues, rendues linéaires en y introduisant des valeurs approchées des inconnues, sera traité par la méthode des moindres carrés.

On pourrait employer soit un théodolite, soit un sextant dont on aurait calé la lunette à une hauteur quelconque, suffisamment voisine du zénith pour éviter les incertitudes de la correction de réfraction. Mais l'emploi du théodolite exige à chaque observation une correction de niveau toujours incertaine; le sextant en est exempt, mais le grossissement de l'instrument est limité et restreint ainsi beaucoup le nombre des étoiles observables, de sorte que les intervalles entre les observations des diverses étoiles sont très longs. La méthode était donc peu employée quand, il y a quelques années, MM. Claude, membre adjoint du Bureau des Longitudes, et Driencourt, Ingénieur hydrographe en chef, ont imaginé un appareil nouveau, l'*astrolabe à prisme*, qui a rendu la

méthode tout à fait pratique. Elle est aujourd'hui couramment employée, d'autant plus que la précision que l'on obtient est absolument comparable à celle que donnent les instruments méridiens dont se servent les géodésiens.

L'astrolabe à prisme est basé sur la propriété suivante du prisme de 60° : lorsque deux rayons lumineux incidents SI et S′ I′, normaux à l'arête A, pénètrent dans un prisme de 60° par les deux faces opposées AB et AC et suivent des directions parallèles,

Fig. 82.



après s'être réfléchis chacun sur la face opposée à l'entrée, l'angle des deux rayons incidents est de 120°, double de l'angle du prisme.

On a en effet, puisque IR et I′R′ sont parallèles :

$$\alpha + \alpha' = A,$$

α étant l'angle CI_1R et α' l'angle BI'_1R'.

Le triangle II_1A donne, comme on le voit sur la figure,

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + r) - A = 90^\circ - A - r;$$

on a de même, dans $I'I'_1A$,

$$\alpha' = 90^\circ - A - r',$$

d'où

$$180^\circ - 2A - r - r' = A,$$

$$A = 60^\circ - \frac{r + r'}{3}.$$

D'autre part, l'angle $IDI' = 2h$ des rayons incidents a pour expression :

$$2h = 360^\circ - (90^\circ + i) - (90^\circ + i') - A = 180^\circ - A - (i + i'),$$

et si $A = 60^\circ$,

$$r + r' = 0 \quad \text{ou} \quad r = -r'.$$

Comme

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'} = n,$$

il en résulte

$$i = -i' \quad \text{ou} \quad i + i' = 0,$$

et, par suite,

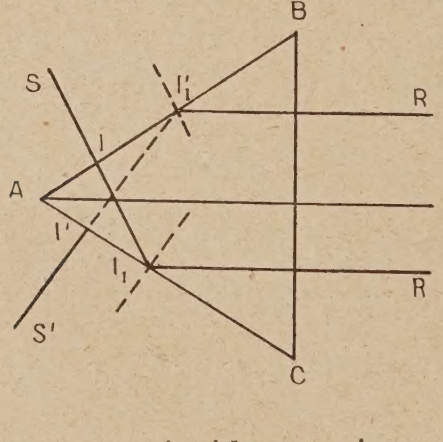
$$2h = 180^\circ - A = 120^\circ.$$

Réciproquement, si $2h = 120^\circ$, les rayons réfléchis à l'intérieur du prisme seront parallèles.

La condition du parallélisme des rayons réfléchis ($i = -i'$) est évidemment remplie pour $i = i' = 0$, c'est-à-dire si les rayons incidents sont normaux aux faces AB et AC et, dans ce cas, la direction commune des rayons réfléchis est parallèle au plan bissecteur du prisme.

Au lieu d'un prisme indéfini, considérons un prisme équilatéral

Fig. 83.

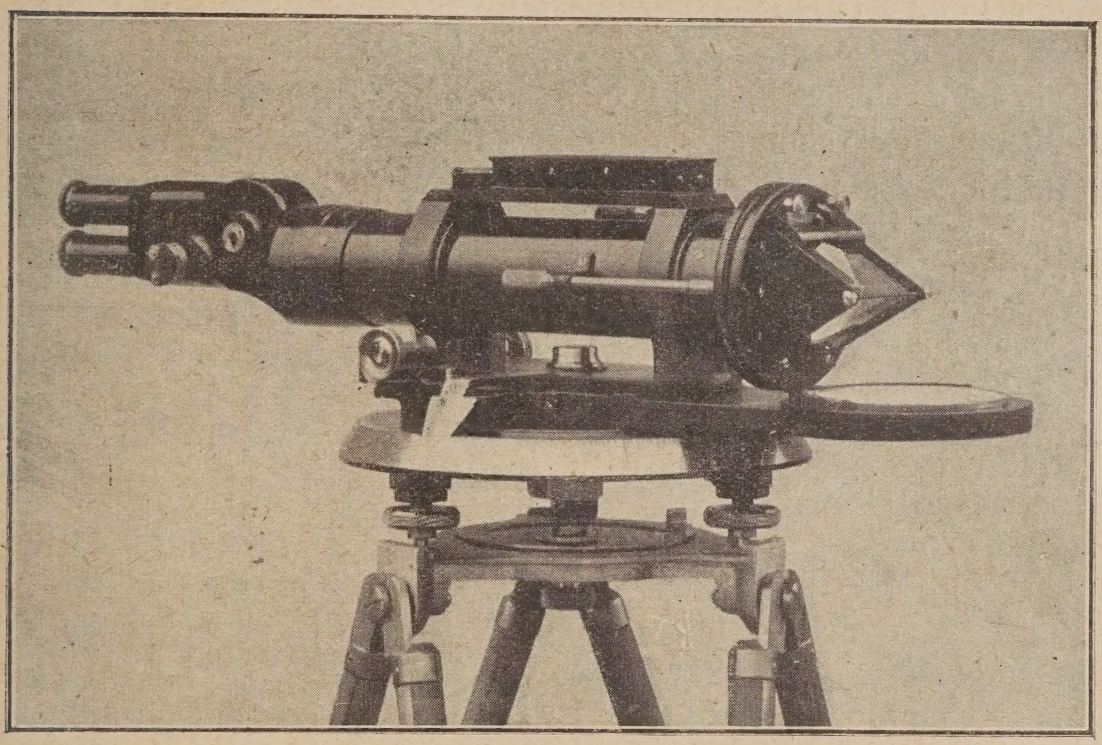


et supposons que les rayons incidents soient normaux aux faces d'entrée, de telle façon que dans le cas de la lumière blanche, il n'y ait pas de dispersion. Si l'on place une lunette astronomique

sur le trajet commun des rayons émergents, de manière que son axe optique soit normal à la face de sortie, on aura réalisé un appareil permettant de mesurer des angles de 120°; les faisceaux émergents de direction suffisamment voisine de l'axe optique, formeront, dans le plan focal principal de l'objectif, deux images superposées dans le plan normal à l'arête A passant par l'axe optique (*fig.* 83).

L'astrolabe à prisme n'est autre qu'un appareil de ce genre

Fig. 84.



Astrolabe à prisme de la Société d'optique et de mécanique de haute précision.

disposé pour la mesure des instants des passages d'astres par le petit cercle de 30° de distance zénithale.

Une lunette horizontale pouvant se mouvoir autour d'un axe vertical, de façon à se placer dans tous les azimuts, porte en avant de l'objectif un prisme équilatéral, dont les arêtes sont horizontales et la face postérieure perpendiculaire à l'axe géométrique de la lunette. Un bain de mercure, formant horizon artificiel, est placé au-dessous et un peu en avant de l'arête antérieure du prisme (*fig.* 84).

Si la lunette est orientée suivant le vertical d'un astre un peu avant que celui-ci n'atteigne la distance zénithale de 30°, on aperçoit dans le plan focal de l'objectif deux images de l'astre, l'une provenant du faisceau qui pénètre directement dans le prisme, normalement à sa face supérieure, et est réfléchi par la face inférieure, l'autre provenant du faisceau, réfléchi par le bain de mercure, qui pénètre par la face inférieure et est réfléchi par la face supérieure. Ces deux images, qui paraissent marcher l'une vers l'autre, se superposent lorsque l'astre atteint la distance zénithale de 30° et l'instant de la superposition se détermine avec une grande précision, puisque les images se déplacent en sens contraire avec, par conséquent, une vitesse relative double de la vitesse de chaque image. Il suffit, pour faire l'observation, de noter l'heure du chronomètre ou de la pendule à l'instant de la superposition des images.

Pour que l'angle mesuré, quand les deux images directe et réfléchie sont en coïncidence, soit exactement de 120°, il faut :

1° Que le prisme soit une masse homogène, que ses faces soient planes, ses arêtes parallèles et ses angles de 60°;

2° Que l'axe de la lunette soit normal aux arêtes du prisme; ces deux conditions sont réalisées par le constructeur.

Il faut, en outre :

1° Que l'axe de la lunette soit perpendiculaire à l'axe de rotation de l'instrument;

2° Que le prisme et la lunette soient ajustés de telle sorte que, l'axe étant vertical, l'arête du prisme soit horizontale (sans quoi il serait impossible d'assurer la coïncidence des deux images directe et réfléchie), ainsi que le plan bissecteur du prisme.

Pour obtenir la perpendicularité de l'axe optique [1] et de l'axe principal, on enlève le prisme et après avoir rendu l'axe principal vertical, au moyen d'un niveau, on vise un collimateur horizontal dont l'image doit se former au centre du champ. On corrige, s'il est nécessaire, au moyen d'une vis spéciale.

---

[1] Dans l'astrolabe, où il n'y a pas de réticule, il faut entendre par axe optique la droite qui joint le centre du champ au centre optique de l'objectif.

L'axe principal étant vertical, pour rendre horizontale l'arête du prisme, on enlève l'oculaire et l'on observe l'image d'un fil à plomb à travers le corps de la lunette et le prisme. On corrige en agissant sur une vis de réglage jusqu'à ce que l'image du fil ne soit plus brisée, mais exactement rectiligne.

Enfin, on rend le plan bissecteur du prisme horizontal en le rendant parallèle à l'axe optique une fois ce dernier réglé. Pour cela, on observe une étoile directement, en même temps qu'à l'horizon artificiel; on agit sur les vis de réglage convenables, jusqu'à ce que la coïncidence des images se produise sur l'horizontale du centre du champ.

L'instrument remplit alors toutes les conditions nécessaires pour l'observation des étoiles de distance zénithale de 30°.

On observe, bien entendu, plus d'étoiles que n'en comporte la stricte solution du problème.

On peut, soit traiter ensuite l'ensemble des équations par la méthode des moindres carrés, après les avoir rendues linéaires par rapport aux corrections à apporter aux valeurs approchées des inconnues, ainsi que nous l'exposerons plus loin, soit employer la méthode graphique des droites de hauteur que nous traiterons en parlant de la navigation astronomique.

EXEMPLES NUMÉRIQUES.

Détermination de l'heure.

Le 5 décembre 1924, à Paris, à $7^h\,2^m15^s,3$, *temps de la pendule, on a observé Arcturus par* $z = 63°\,35'27'',8$ (*corrigée de la réfraction*) : *déterminer l'heure sidérale, et par suite l'état de la pendule.*

Quelques observations préliminaires ont donné $41°10'$ pour la valeur approchée de λ et $+\,2^h21^m$ pour l'état cherché.

L'observation d'Arcturus a été faite à l'Est.

Les coordonnées de l'étoile sont :

$$Æ = 14^h12^m12^s,25 \qquad \text{et} \qquad \delta = 70°25'32'',8.$$

Prenons la formule (1) :

$$\cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos Æ.$$

$\log \cos z$	9,6481404
nombre	0,4447750
$\log \cos \lambda$	9,8766785
$\log \cos \delta$	9,5250806
$\log 2^{e}$ nombre	9,4017591
2^{e} nombre	0,2522081
Différence	0,1925669
$\log \sin \lambda$	9,8183919
$\log \sin \delta$	9,9741469
3^{e} log	9,7925388
log Diff.	9,2845811
3^{e} log	9,7925388
$\log \cos \mathcal{H}$	9,4920423
$\mathcal{H}$	288°5′18″,7

	h m s
$\mathcal{R}$	14.12.12,25
$\mathcal{H}$ (en temps)	19.12.21,25
H	9.24.33,50
h (pendule)	7. 2.15,30
Total	+ 2.22.18,20

Ainsi, il faut ajouter à toutes les indications de la pendule $2^{h}22^{m}18^{s},20$ pour avoir l'heure sidérale.

L'erreur de ce résultat, provenant de l'incertitude de la valeur provisoire de λ, est donnée par

$$d\mathcal{H} = \frac{d\lambda}{\sin \lambda \operatorname{tang} A}.$$

L'azimut A se calcule par l'analogie des sinus :

$\log \sin \delta$	9,9741
$\log \sin \mathcal{H}$	9,9780n
colog $\sin z$	0,0479
$\log \sin A$	0,0000n

L'angle A est donc de 270°; sa tangente est infinie, et par suite $d\mathcal{H}$ est nul en tant qu'il provient de $d\lambda$. Quant à l'erreur probable du retard provenant de celle de z, elle se réduit ici,

puisque A est à peu près de 270°, à

$$\frac{dz}{\sin\lambda} = 1{,}52\,dz.$$

Si l'on a mesuré z à 1″ près, l'heure sera déterminée à $\frac{1'',52}{15} = 0^s,1$ près.

Détermination de la colatitude par les observations circumméridiennes.

Le même jour, on a observé près du méridien α du Lion (Régulus) dont les coordonnées étaient

$$AR = 10^h4^m22^s,0, \qquad \delta = 77°39'56'',0.$$

On a trouvé, par la double opération du retournement,

$$\left.\begin{array}{l} \text{à } 10^h5^m14^s,2 \\ \quad\ 10^h6^m\ 0^s,5 \end{array}\right\} z = 36°30'22'',3.$$

Les heures sont déjà corrigées du retard ci-dessus, et la distance zénithale a été corrigée de la réfraction. Ici nous donnons les heures des deux pointés au lieu de leur moyenne, comme dans l'exemple précédent, parce que la distance zénithale de l'étoile, près du méridien, ne variant plus proportionnellement au temps, mais comme le carré du temps, la moyenne des heures, dont la différence est de plus de 1^m, ne répond plus à la demi-somme des distances zénithales. Nous calculerons la réduction au méridien pour chacune de ces heures, et c'est la moyenne des deux corrections que nous appliquerons à la distance zénithale observée.

La formule de cette réduction est

$$z - z_m = 206265'' \frac{2\sin\lambda\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z - z_m)} \sin^2\tfrac{1}{2}AH.$$

On prendra pour λ et $\frac{1}{2}(z + z_m)$ les valeurs approchées 41° 10′ et 36° 30′. Voici le calcul :

H.....	$10^h5^m14^s,2$	$10^h6^m\ 0^s,5$	log 2.....	0,3010
AR.....	$10^h4^m22^s,0$	$10^h4^m22^s,0$	log sin λ.....	9,8184
AH.....	$0^h0^m52^s,2$	$0^h1^m38^s,5$	log sin δ.....	9,9899
$\frac{1}{2}$AH en arc....	6′ 30″,0	12′ 18″,7	colog sin z....	0,2278
			log 206265....	5,3144
			log. const....	5,6515

log const.	5,6515	5,6515
$\log \sin \frac{1}{2} \mathcal{H}$.	4,5533	5,1081
	0,2048	0,7596
$z - z_m$	1″,6	5″,8

Moy. = 3″,7

z	36°.30′.22″,3
$z - z_m$	— 0. 0. 3,7
z_m	36.30.18,6
δ	77.39.56,0
λ	41. 9.37,4

Si l'on se bornait à calculer la réduction au méridien pour la moyenne des heures $10^h\,5^m\,37^s,3$, on trouverait 3″,3, valeur légèrement différente.

Lorsqu'on a un assez grand nombre de mesures circumméridiennes de z à réduire, on abrégera le calcul en appliquant à la moyenne des z la correction

$$\frac{1}{n}\,\frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z+z_m)}\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{H}}{\sin 1''},$$

dont la Table suivante fournira aisément le dernier facteur :

$\mathcal{H}$.	$206265\times 2\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{H}$.	$\mathcal{H}$.	$206265\times 2\sin^2\frac{1}{2}\mathcal{H}$.
m s	″	m s	″
0,00	0,00	6,20	78,75
0,20	0,22	6,40	87,26
0,40	0,87	7,00	96,20
1,00	1,96	7,20	105,58
1,20	3,49	7,40	115,40
1,40	5,45	8,00	125,65
2,00	7,85	8,20	136,34
2,20	10,69	8,40	147,46
2,40	13,96	9,00	159,02
3,00	17,67	9,20	171,02
3,20	21,82	9,40	183,46
3,40	26,40	10,00	196,32
4,00	31,42	10,20	209,62
4,20	36,87	10,40	223,36
4,40	42,76	11,00	237,54
5,00	49,09	11,20	252,15
5,20	55,84	11,40	267,20
5,40	63,05	12,00	282,68
6,00	70,68		

Si l'on s'écarte notablement du méridien, il faudra cesser de prendre sin$z$ pour sin $\frac{1}{2}(z + z_m)$ et calculer les réductions une à une avec des valeurs plus approchées de ce dénominateur.

Orientation.

Soient A l'azimut de l'étoile circumpolaire (δ Petite Ourse) observée vers l'un de ses plus grands écarts par rapport au méridien, et A′ l'azimut inconnu d'un signal. Le 5 décembre 1924, à $12^h\,10^m\,17^s,07$, par $41^\circ\,10'$ de colatitude approchée, on a mesuré la différence d'azimut A — A′ entre δ Petite Ourse et le signal B; on a trouvé $A - A' = 22^\circ\,17'15'',2$: conclure de là l'azimut A′ du signal. Les coordonnées de l'étoile étaient, à cette date :

	h m s		
Æ.....	17.58.12,19	δ.....	3°0′ 1″,6
H.....	12.10.17,05		
Æ.....	18.12. 4,86 (1).....	=	273°1′12″,9

Nous emploierons les formules (2) et (3) de la page 206.

log sin λ.....		9,8183919
log cos δ.....		9,9994043
log 1er terme.....		9,8177962 n
log cos λ.....		9,8766784
log sin δ.....		8,7188643
log cos Æ.....		8,7217192
log 2e terme.....		7,3172620
1er terme.....	— 0,6573493	
2e terme.....	+ 0,0020762	
sin z cos A.....	— 0,6552731	
log sin δ.....		8,7188643
log sin Æ.....		9,9993963 n
log sin z sin A.....		8,7182606 n
log sin z cos A.....		9,8164224 n
log tang A.....		8,9018382

	° ′ ″
A.....	184.33.39,0
A — A′.....	22.17.15,2
	162.16.23,8

Ainsi l'azimut du signal B est égal à 162°,16′23″,8.

(1) Pour retrancher ici Æ de H, on ajoute à ce dernier 24^h.

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES ERREURS.

On fait des mesures, soit pour déterminer certains éléments que la science rattache par une expression mathématique aux phénomènes observés, soit pour vérifier cette loi elle-même. Mais, quel que soit le but qu'on se propose, il ne faut pas oublier que nos mesures n'ont jamais une exactitude parfaite. Toute observation est entachée d'*erreurs;* ces erreurs proviennent de défauts dans la construction des instruments, des variations qui se produisent au cours des observations, soit dans les conditions où l'on opère, soit dans le réglage; enfin elles résultent également de l'imperfection de nos sens, de celui de la vue, de celui de l'ouïe, de celui du toucher. Ces erreurs, lorsque les observations sont faites dans de bonnes conditions, restent toujours petites. Mais, comme ces petites erreurs inévitables doivent exercer une certaine influence sur les conclusions que l'on tire des observations, il est nécessaire de s'en rendre compte, soit pour connaître le degré de précision avec lequel les mesures que l'on a faites donnent le résultat cherché, soit pour savoir si les discordances qui se manifestent toujours entre la théorie et l'observation tiennent aux observations ou bien à la théorie.

Nous ferons remarquer, sur ce second point, que c'est invariablement par ce genre de discussion que la science progresse. Toutes les grandes découvertes astronomiques, celles de la précession, de la nutation, de l'aberration, des principales inégalités périodiques ou séculaires de la Lune et des planètes, ont été faites ainsi. Les lois de Kepler elles-mêmes, ces bases de l'Astronomie solaire, sont

sorties d'une discussion de ce genre. Les discordances entre les théories anciennes et les observations de Tycho-Brahé ne dépassaient pas 8′, écart assez faible pour des observations faites à l'œil nu; c'est cependant pour les faire disparaître qu'il a fallu réformer toute l'Astronomie, et cela parce qu'il était impossible de les attribuer aux mesures si précises de l'observateur danois.

Les erreurs d'observation se divisent en deux catégories essentiellement distinctes : les erreurs *accidentelles* et les erreurs *systématiques*, et le premier pas à faire dans cette étude est de distinguer entre les erreurs accidentelles ou fortuites que, faute de mieux, nous attribuons au hasard, et qui peuvent provenir de causes inconnues, difficiles à démêler, ou encore de l'imperfection des sens de l'opérateur, et les erreurs systématiques qui tiennent à une cause connue, dont nous avons pu étudier les lois.

C'est un fait d'expérience mille et mille fois vérifié que les premières ne suivent aucune loi; elles sont indifféremment positives ou négatives; les petites erreurs sont de beaucoup les plus nombreuses; enfin les plus fortes, relativement très rares, ne dépassent jamais certaines limites assignables.

Les secondes, au contraire, ont une marche régulière qui décèle leur origine, et pour être systématique, il n'est pas nécessaire que l'erreur soit constante; il suffit qu'elle soit une fonction déterminée des conditions d'observation. On a vu combien nous avons insisté sur les erreurs instrumentales, sur la réfraction, etc. Les causes étaient connues : nous avons cherché leurs lois et donné le moyen d'en purger les observations. Ainsi la réfraction diminue les distances zénithales proportionnellement à leurs tangentes; l'excentricité d'un cercle affecte les angles mesurés proportionnellement au sinus de ces mêmes directions comptées à partir d'une certaine origine, etc. Maintenant nous allons suivre la marche inverse et montrer comment on peut découvrir, en discutant les observations, la loi et même la cause des erreurs systématiques dont elles sont affectées.

CHAPITRE VIII.

ERREURS SYSTÉMATIQUES.

Dans la théorie des erreurs, on suppose, et cette remarque est essentielle, que les observations sont corrigées de toutes les erreurs systématiques et qu'il n'y reste que celles que l'on considère comme accidentelles ou fortuites.

Il y a donc lieu, tout d'abord, de voir comment on peut rechercher expérimentalement une cause d'erreur systématique, dans une série d'observations faites en nombre surabondant pour déterminer une grandeur inconnue.

Recherche expérimentale d'une cause d'erreur.

Voici une série d'observations méridiennes faites à Paris, au nord du zénith, pour déterminer la colatitude. On sait d'avance qu'avec l'instrument employé, l'erreur à craindre sur une distance zénithale n'est guère que de $0'',5$. Voici les résultats :

Distances polaires des étoiles observées.	λ conclu.	Écarts (moy. — obs.).
$+31^{\circ}$	$41^{\circ}.9'.48'',2$	$-1'',0$
-20 Passage inférieur...	46,5	$+0,9$
$+41$	49,1	$-1,7$
-33 P. I.	45,7	$+1,7$
$+1$	46,8	$+0,6$
$+19$	48,1	$-0,7$
$+10$	47,9	$-0,5$
-12 P. I.	41.9.46,7	$-1,7$
Moyenne.....	41.9.47,4	

Les signes des écarts paraissent être indifféremment + et —,

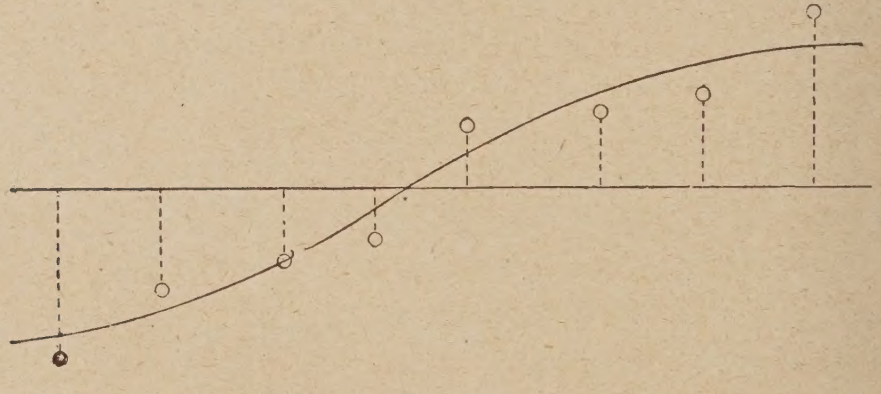
mais leur grandeur dépasse de beaucoup les limites ordinaires. Il y a donc lieu d'examiner s'il n'y aurait pas ici quelque erreur systématique. Comme $\lambda = \delta + z$ et que les δ des étoiles employées sont très exactes, c'est sur les z qu'il faut porter notre attention. Rangeons donc ces écarts dans l'ordre des distances zénithales.

z.	λ.	Écarts.
°	° ′ ″	″
0.....	41.9.49,1	— 1,7
10.....	48,2	— 1,0
22.....	48,1	— 0,7
31.....	47,9	— 0,5
40.....	46,8	+ 0,6
53.....	46,7	+ 0,7
63.....	46,5	+ 0,9
74.....	41.9.45,7	+ 1,7

Ainsi, plus les étoiles observées sont loin du zénith, plus le λ conclu est petit. Pour découvrir la loi de l'erreur systématique dont ces mesures sont évidemment affectées, construisons la courbe des écarts en prenant pour abscisses les z.

Cette courbe ayant assez l'air d'une sinusoïde, la loi de l'erreur

Fig. 85.



sera de la forme $\alpha \sin z$, ce qui indiquerait une très notable flexion dans la lunette. Pour le vérifier, on détermine immédiatement cette flexion par deux collimateurs horizontaux, et l'on trouve effectivement $\alpha = +3''$. En ajoutant la correction $3'' \sin z$ aux λ précédents, on forme ce tableau :

λ observé.	Flexion.	λ corrigé.	Écarts (moy. — obs.).
° ′ ″	″	° ′ ″	″
41.9.49,1	+ 0,0	41.9.49,1	— 0,1
48,2	0,5	48,7	+ 0,3
48,1	1,1	49,2	— 0,2
47,9	1,5	49,4	— 0,4
46,8	1,0	48,7	+ 0,3
46,7	2,4	49,1	— 0,1
46,5	2,7	49,2	— 0,2
41.9.45,7	+ 2,9	41.9.48,6	+ 0,4
	Moyenne...	41.9.49,0	

Les écarts n'ont plus de marche régulière et ne sortent plus des limites de la précision habituelle pour des instruments de premier ordre; ce sont probablement des erreurs accidentelles.

Second exemple. — Pour étudier certaines anomalies qui se présentent dans les observations stellaires, on a choisi γ du Dragon parce que cette étoile est très voisine du zénith (à Greenwich) et qu'il n'y a pas à craindre l'incertitude de la réfraction.

Voici une série de mesures de la distance polaire, continuée pendant une année entière, de mois en mois :

Dates.	δ observés.	Écarts (obs. — moy.)	t en jours.
	° ′ ″	″	
31 décembre	38.29.54,1	+ 5,4	0
30 janvier	62,5	+ 13,8	30
29 février	69,2	+ 20,5	60
30 mars	69,2	+ 20,5	90
29 avril	64,0	+ 15,3	120
29 mai	54,9	+ 6,2	150
28 juin	44,1	— 4,6	180
28 juillet	36,8	— 11,9	210
27 août	30,3	— 18,4	240
26 septembre	28,8	— 19,9	270
26 octobre	31,4	— 17,3	300
25 novembre	38.29.39,1	— 9,6	330
4 janvier	38.29.52,2	+ 3,5	370
Moyennne des douze premiers..	38.29.48,7		

Les écarts avec la moyenne de l'année varient de la manière la plus régulière avec le temps. Pour en découvrir la loi, nous pren-

drons le temps pour abscisse et les écarts pour ordonnées. La courbe obtenue est évidemment une sinusoïde. Le phénomène est donc périodique, ce qu'on vérifierait en poursuivant les observations : la période est d'une année et l'expression mathématique de la loi est, par à peu près,

$$\delta - \delta' = 20'' \sin[59',1\,(t+17)],$$

en désignant par δ' la distance polaire moyenne, par t le temps exprimé en jours.

Est-il possible de remonter de cette loi à la cause des variations que subit ainsi périodiquement la distance polaire de cette étoile ? Les astronomes qui ont remarqué, les premiers, ces singuliers écarts, ont pensé tout d'abord à l'illusion produite par la circulation annuelle de la Terre autour du Soleil. Il est certain, en effet, que les deux périodes, celle de cette circulation et celle des variations des δ pour cette étoile étant les mêmes, les deux phénomènes sont en relation de cause à effet. Nous avons dit que cette illusion consiste en ce que chaque étoile doit paraître décrire en un an, autour de sa position moyenne, une orbite égale et parallèle à celle de la Terre. Mais nous verrons plus tard, en appliquant le calcul à cette question, que, pour γ du Dragon, les variations de δ dues à cette parallaxe annuelle, auraient pour expression

$$\delta - \delta' = -k\,\cos[59',1\,(t+17)],$$

k étant un très petit coefficient. Le phénomène que nous étudions n'est donc pas imputable à cette cause ; car, lorsque $\delta - \delta'$ devrait croître sous son influence, l'observation montre qu'il va au contraire en décroissant et prend même un signe contraire.

Ce phénomène périodique a pris une importance énorme lorsqu'on s'est aperçu que toutes les étoiles le présentaient avec la même période annuelle et avec des caractères analogues. Ce n'est assurément qu'une apparence ; mais, bien que nous en ayons trouvé expérimentalement la loi, il nous manque, pour remonter à la cause, des notions que l'étude du système solaire nous donnera plus tard.

Dans le premier exemple que nous venons d'examiner, nous voyons qu'après avoir corrigé les mesures d'une même grandeur

des erreurs systématiques que nous connaissons, les résultats diffèrent encore les uns des autres de petites quantités ne paraissant plus obéir à aucune loi; ces petits écarts nous paraissent donc être des erreurs accidentelles. Il en serait de même pour le second exemple. Les erreurs accidentelles se manifesteraient dans les deux cas par l'impossibilité de faire passer la sinusoïde par tous les points observés après correction des effets des erreurs systématiques; les écarts seraient tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et presque tous fort petits. Ce sont ces erreurs accidentelles que nous allons étudier, en supposant que les observations à discuter aient été préalablement purgées de toute erreur systématique provenant des instruments ou de toute autre cause.

CHAPITRE IX.

THEORIE DES ERREURS ACCIDENTELLES.

Les diverses catégories d'observations.

Toute observation faite pour mesurer une grandeur se range dans l'une des trois catégories suivantes :

1° Les *observations directes*, où l'observation donne directement la grandeur à mesurer.

2° Les *observations indirectes*, où l'on ne détermine pas directement les grandeurs à mesurer, mais où l'on mesure une ou plusieurs grandeurs, pour en déterminer d'autres, indépendantes les unes des autres, et liées aux premières par une certaine relation, fonction des grandeurs inconnues indépendantes et d'une ou plusieurs variables, le temps, la température, la pression barométrique, etc., qui caractérisent les *conditions de l'observation*. Soit, par exemple, à déterminer la longueur à 0° et les coefficients de dilatation d'une règle de platine; nous ne les déterminons pas directement, mais nous mesurons, à l'aide d'un comparateur, la longueur de la règle à différentes températures, et les grandeurs inconnues à déterminer sont liées à la longueur de la règle à t degrés par la relation

$$l_t = l_0(1 + \alpha t + \beta t^2),$$

où l_0, α et β sont les inconnues indépendantes, et t la variable qui caractérise l'expérience.

Dans ces deux catégories d'observations, directes et indirectes, on a fait, dans le but d'éliminer les erreurs accidentelles, plus d'observations qu'il n'est nécessaire pour déterminer les inconnues; le problème qui se pose consiste à déduire de l'ensemble de ces

observations les valeurs des inconnues qui nous paraîtront les plus plausibles.

3° La troisième catégorie est celle des *observations conditionnelles.*

Ici les grandeurs à déterminer ne sont plus indépendantes, mais reliées entre elles par une ou plusieurs relations qui doivent être rigoureusement satisfaites. Dans le cas d'un triangle plan dont on aurait mesuré les trois angles, par exemple, la somme de ces trois angles doit être rigoureusement égale à deux droits; comme il y a des erreurs d'observation, les relations de condition ne seront pas rigoureusement satisfaites, et le problème consistera à répartir les corrections de la façon la plus plausible sur les résultats des mesures de telle sorte qu'une fois corrigés, ils satisfassent rigoureusement aux équations de condition.

Ainsi donc, dans les trois cas, le problème se pose de la même façon. Pour déterminer certaines grandeurs, on a fait des observations surabondantes; on dispose de plus d'équations qu'il ne faut pour déterminer les inconnues, et comme il y a des erreurs d'observation, le système d'équations à résoudre est incompatible. On veut cependant tirer parti de toutes les observations que l'on a faites et il s'agit, dans les deux premiers cas, de trouver des valeurs des inconnues qui, sans satisfaire rigoureusement à chaque équation particulière, nous paraîtront satisfaire le mieux possible à leur ensemble et, dans le troisième cas, de déterminer les corrections à apporter aux valeurs observées, qui nous paraîtront le plus plausibles, et qui seront telles que les valeurs corrigées satisfassent rigoureusement aux équations de condition.

Observations directes.

Examinons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on a mesuré directement une grandeur x pour laquelle on a obtenu les évaluations n, n', n'', ... en nombre m. C'est comme si l'on devait déterminer x de manière à satisfaire le mieux possible aux m équations suivantes :

$$x = n,$$
$$x = n',$$
$$x = n'',$$
$$\cdots\cdots$$

Si ces mesures ne sont affectées que d'erreurs purement accidentelles, celles-ci seront indifféremment positives ou négatives; en outre, les plus nombreuses, de beaucoup, seront les plus petites. Il en résulte qu'en prenant la moyenne des mesures, il y aura une large compensation de ces erreurs. Si par hasard il se trouvait quelque grosse erreur (grosse dans les limites admissibles, bien entendu) qui ne fût pas entièrement annulée par une erreur égale et de signe contraire, elle serait du moins fortement diminuée par le diviseur m, nombre des équations. L'équation résultante

$$x = \frac{n + n' - n'' + \dots}{m} \qquad \text{ou} \qquad \frac{[n]}{m} \quad (1)$$

sera donc beaucoup plus exacte que chacune des proposées prise en particulier, pourvu que m soit un assez grand nombre.

D'après cela, nous aurons une idée très approchée des erreurs accidentelles qui auront été réellement commises dans chaque mesure partielle si nous portons cette valeur de x dans les équations. Ces équations ne seront pas satisfaites rigoureusement; elles laisseront de petits *résidus* qui représenteront à très peu près les erreurs commises. Désignons-les par ε, ε', ε'', ... D'après cela,

$$\begin{aligned} x - n &= \varepsilon, \\ x - n' &= \varepsilon', \\ x - n'' &= \varepsilon'', \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

x ayant ici la valeur ci-dessus $\frac{[n]}{m}$. Il est facile de voir que la somme de ces résidus est nulle, car, si l'on remplace x par sa valeur, cette somme devient

$$\frac{n + n' + n'' + \dots}{m} - n + \frac{n + n' + n'' + \dots}{m} - n' + \frac{n + n' + n'' + \dots}{m} - n'' + \dots,$$

somme qui se réduit évidemment à zéro.

Cela posé, remarquons que cette même somme

$$(x - n) + (x - n') + (x - n'') + \dots$$

(1) En représentant la somme des termes semblables par l'un d'eux enfermé dans les crochets [ ].

est, à un facteur constant près (le facteur 2), la dérivée par rapport à x de la somme des carrés des erreurs :

$$(x-n)^2+(x-n')^2+(x-n'')^2+\dots.$$

De ce que cette dérivée est nulle, il résulte que la somme des carrés des erreurs est un minimum. Cela veut dire que toute autre valeur que la moyenne $\frac{[n]}{m}$, mise à la place de x dans les équations proposées, donnerait une plus forte somme des carrés des résidus.

Si l'on avait une autre série de m mesures de la même quantité, faites avec moins de soin et avec des instruments plus grossiers, la somme des résidus relatifs à la moyenne serait encore nulle, mais la somme de leurs carrés serait plus forte. On peut donc considérer cette somme des carrés, réduite au minimum, comme un moyen d'apprécier la précision de ces m mesures. Dès lors, pour juger de la précision d'une mesure isolée, il suffira de prendre la moyenne des carrés des résidus, c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon\varepsilon+\varepsilon'\varepsilon'+\varepsilon''\varepsilon''+\dots}{m}=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m},$$

et d'en extraire la racine carrée. L'erreur moyenne d'une mesure isolée sera donc $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ ou, plus exactement, comme nous le verrons plus loin, $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}$.

Observations indirectes. Méthode des moindres carrés.

Comme nous l'avons vu, dans le cas des observations indirectes, la grandeur à déterminer au moyen d'une série de mesures ne dépend pas de celles-ci par une relation aussi simple que $x=n$; on a plusieurs inconnues à déterminer à la fois, inconnues reliées aux quantités mesurées par une relation de la forme

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \dots, t)=\mathrm{N},$$

t étant une variable indépendante, le temps par exemple, A, B, C, ... des inconnues, indépendantes les unes des autres, qui entrent dans l'expression analytique de la loi, et N une quantité fournie par l'observation. Si l'on possède m mesures N, N′, N″, ..., répondant

à diverses valeurs t, t', t'', ... de l'argument t, on formera m équations de la forme

$$f(A, B, C, \ldots, t) = N,$$
$$f(A, B, C, \ldots, t') = N',$$
$$f(A, B, C, \ldots, t'') = N'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si A, B, C étaient les vraies valeurs des inconnues, les relations

$$f(A, B, C, \ldots, t) = \varepsilon,$$
$$f(A, B, C, \ldots, t') = \varepsilon',$$
$$f(A, B, C, \ldots, t'') = \varepsilon'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

feraient connaître les erreurs d'observation. Legendre a proposé en 1805, de déterminer les valeurs les plus plausibles des inconnues, A, B, C, ..., en rendant minimum la somme des carrés des résidus, et cela par analogie avec ce que l'on fait en prenant la moyenne. « Il s'établit ainsi, a dit Legendre pour justifier sa proposition, une sorte d'équilibre entre les erreurs qui, empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connaître le système le plus proche de la vérité. »

Appliquons donc la règle de Legendre, c'est-à-dire cherchons à déterminer les constantes inconnues A, B, C, ... à l'aide de ces m équations (m étant bien supérieur au nombre desdites inconnues), de manière que la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire

$$[f(A, B, C, \ldots, t) - N]^2 + [f(A, B, C, \ldots, t') - N]^2 + \ldots,$$

soit un minimum. Pour cela, il faut et il suffit que les dérivées de cette somme prises : 1° par rapport à A; 2° par rapport à B, 3° par rapport à C, etc., inconnues que nous avons supposées indépendantes les unes des autres, soient séparément nulles. Ces conditions du minimum nous fourniront autant d'équations finales entre A, B, C, ..., et N, N', N'', ..., qu'il y a d'inconnues, système qu'on résoudra par les méthodes habituelles de l'Algèbre.

Ces calculs seraient bien souvent inextricables; heureusement les circonstances ordinaires de la pratique nous permettent de les simplifier considérablement. En effet, dans la pratique, on connaît toujours d'avance des valeurs plus ou moins approchées des inconnues A, B, C, ... Par exemple, dans l'Astronomie nautique,

l'estime fournit des valeurs approchées des inconnues λ et L. Désignons-les ici par A′, B′, C′, ... et par x, y, z, ... les petites *corrections* dont ces valeurs provisoires ont besoin, en sorte qu'on ait

$$A = A' + x, \qquad B = B' + y, \qquad C = C' + z, \qquad \dots.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale et développons le premier membre, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, c'est-à-dire les termes x^2, y^2, z^2, ... ou xy, yz, ... ainsi que les suivants, nous aurons

$$f(A', B', C, \dots, t) + \frac{df}{dA}x + \frac{df}{dB}y + \frac{df}{dC}z + \dots = N,$$

équation linéaire en x, y, z, ... qu'on écrira

$$ax + by + cz + \dots = n,$$

en désignant par n la différence immédiatement calculable et donnée par l'observation, puisqu'elle renferme N,

$$N - f(A', B', C', \dots, t).$$

Dès lors, il est bien facile d'appliquer, à la résolution des m équations linéaires

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + \dots &= n, \\ a'x + b'y + c'z + \dots &= n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &, \end{aligned}$$

la condition de rendre minimum la somme des carrés des résidus ou erreurs, c'est-à-dire

$$(ax + by + cz + \dots - n)^2 + (a'x + b'y + c'z + \dots - n')^2 + \dots$$

Réduisons les inconnues à trois pour fixer les idées et écrivons que la dérivée de la somme précédente, prise par rapport à x, est nulle; nous aurons l'équation finale en x

$$2a(ax + by + cz - n) + 2a'(a'x + b'y + c'z - n') + \dots = 0.$$

Supprimons le facteur 2 et désignons par $[aa]$, $[ab]$, ... les sommes telles que

$$aa + a'a' + a''a'' + \dots \quad \text{ou} \quad ab + a'b' + a''b'' + \dots.$$

Cette équation prendra la forme

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z = [an].$$

En opérant de même pour y et pour z, nous aurons les deux dernières équations finales

$$[ab]x + [bb]y + [bc]z = [bn],$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z = [cn].$$

Ces trois équations finales nous donneront pour x, y, z un système de valeurs jouissant de la propriété de rendre minimum la somme des carrés des résidus. Tout autre système de valeurs qu'on assignerait à x, y, z, dans les m équations de condition, donnerait une plus grande somme pour les carrés des résidus. La règle est donc :

Pour former l'équation en x, ajouter toutes les équations de condition après avoir multiplié chacune d'elles par le coefficient de x dans cette équation, le signe compris. Opérer de même pour les équations finales relatives à y et à z.

On voit que cette prescription revient au fond à donner une grande prépondérance aux équations de condition où x a les plus forts coefficients, et de plus à changer tous les signes des équations où x a un coefficient négatif. Ainsi, dans l'exemple suivant,

$$\begin{aligned} 3,0x + 1,4y &= 0,4, \\ -1,2x + 3,0y &= 1,5, \\ 0,1x + 2,0y &= 1,0, \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

si l'on tire, de la première, la valeur de x, l'erreur des mesures sera divisée par 3; elle le serait par un nombre 30 fois plus petit dans la troisième. C'est, ainsi que nous le verrons plus loin, comme si, dans la première équation, x avait été obtenu par un nombre 900 fois plus grand d'observations directes. Par conséquent, il faut donner à la première une importance 900 fois plus grande qu'à la dernière. C'est ce qui a lieu quand, pour former l'équation finale en x, on fait la somme des équations ainsi transformées :

$$\begin{aligned} 9,00x + 4,2y &= 1,2, \\ 1,44x - 3,6y &= -1,8, \\ 0,01x + 0,2y &= 0,1, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On faisait quelque chose de cela autrefois, avant l'introduction de la méthode des moindres carrés de Legendre, car, pour former l'équation en x, on ajoutait ensemble les équations où x avait un fort coefficient, après avoir changé de signe celles où ce coefficient de x était négatif, et l'on négligeait les équations dans lesquelles x avait un coefficient très faible. Mais la méthode des moindres carrés a l'avantage de donner à chaque équation, à chaque mesure par conséquent, l'influence qui lui revient réellement, de bannir tout arbitraire dans l'appréciation de l'importance de telle ou telle équation, et d'aboutir, en outre, au système des valeurs *les plus probables* pour les inconnues, comme nous le montrerons plus loin.

Erreur moyenne des observations.

Si nous portons les valeurs de x, y, z, ainsi trouvées, dans les m équations primitives, nous aurons m résidus ε, ε', ε'', ... tels que la somme de leurs carrés

$$\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \ldots \quad \text{ou bien} \quad [\varepsilon\varepsilon]$$

soit un minimum. Il est donc naturel de prendre, comme dans le cas de la moyenne arithmétique, la moyenne de ces m carrés, c'est-à-dire $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$ pour la valeur moyenne des carrés des erreurs, ou $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ pour l'erreur moyenne quadratique d'une observation isolée (1).

Cependant il est essentiel de remarquer ici que, si nous n'avions que trois équations de condition au lieu de m, en les résolvant, nous obtiendrions un système de valeurs pour x, y, z qui ne laisserait aucun résidu dans ces équations. Nous n'avons donc en réalité, malgré nos m résidus, que $m - 3$ données distinctes pour juger des erreurs; $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ donnerait une idée trop avantageuse du degré de précision des mesures. On est ainsi conduit à

(1) On appelle « erreur moyenne arithmétique » la moyenne de la valeur absolue de toutes les erreurs $\frac{\varepsilon}{m}$; il ne faut pas la confondre avec l'erreur moyenne quadratique, moyenne des carrés des erreurs.

adopter $m - 3$ et non m pour dénominateur. D'après cela, nous prendrons pour *erreur moyenne* quadratique d'une observation $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-i}}$, i étant le nombre des inconnues, et nous la désignerons en général par ε_1 [1].

Observons toutefois qu'il ne faudrait pas ajouter à la valeur de l'erreur moyenne une signification par trop absolue. Les résultats d'observation peuvent être notablement différents avec deux observateurs tout en pouvant inspirer la même confiance. Les divergences des résultats peuvent tenir, en effet,

---

[1] Le motif allégué pourrait paraître peu concluant. Considérons donc la question de plus près et supposons qu'il s'agisse de m équations à une inconnue telles que

$$x = n,$$
$$x = n',$$
$$\ldots\ldots$$

La valeur conclue est $x = \frac{[n]}{m}$. En la portant dans les équations de condition, on a pour résidus

$$\frac{[n]}{m} - n \quad \text{ou} \quad \varepsilon,$$
$$\frac{[n]}{m} - n' \quad \text{ou} \quad \varepsilon',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si ces résidus étaient absolument exacts, nous en conclurions ε_1, erreur moyenne d'une observation, par la relation

$$m\varepsilon_1^2 = [\varepsilon\varepsilon],$$

et, par suite, nous aurions $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$ pour l'erreur moyenne de la valeur assignée à x. Mais $\frac{[n]}{m}$ n'est que la valeur la plus probable de x; soit donc $\frac{[n]}{m} + \alpha$ la valeur véritable; les m résidus exacts seront :

$$\varepsilon - \alpha,$$
$$\varepsilon - \alpha,$$
$$\varepsilon'' - \alpha,$$
$$\ldots\ldots$$

La somme de leurs carrés sera

$$[\varepsilon\varepsilon] - 2\alpha[\varepsilon] + m\alpha^2 = m\varepsilon_1^2.$$

Remarquez qu'ici $[\varepsilon] = 0$ et que, α devant être de l'ordre de grandeur de

à ce que les observations n'étant, en pratique, jamais complètement expurgées des erreurs systématiques, les deux observateurs ont eu des résultats entachés d'erreurs systématiques insoupçonnées et différentes.

Erreur moyenne d'une fonction quelconque de quantités d'une précision donnée.

Soit $U = f(A, B, C, \ldots)$ une fonction des quantités A, B, C, pour lesquelles les erreurs à craindre ou les erreurs moyennes soient respectivement

$$\pm\alpha, \quad \pm\beta, \quad \pm\gamma.$$

Lorsque A, B, C varieront de quantités de cet ordre-là, U variera lui-même d'une petite quantité u qu'il faut déterminer et que nous considérerons, sous certaines conditions, comme l'erreur à craindre sur U. Or α, β, γ étant de très petites quantités dont on peut négliger les puissances supérieures et les produits dans le développement suivant,

$$U \pm u = f(A, B, C, \ldots) \pm \frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma,$$

ou bien

$$\pm u = \pm \frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma.$$

---

l'erreur moyenne de x, nous pourrons, sans erreur sensible, le remplacer par $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$. La relation précédente se réduira donc à

$$[\varepsilon\varepsilon] + m\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}\right)^2 = m e_1^2,$$

d'où

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}.$$

Par un raisonnement analogue, on ferait voir que, dans le cas de i inconnues, on doit écrire

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-i}};$$

mais il faudrait s'appuyer sur les développements que nous donnerons plus loin.

Si nous formions des relations de ce genre pour toutes les valeurs qu'il est permis d'attribuer à α, β, γ, nous aurions les valeurs correspondantes de u. Par conséquent, nous obtiendrons la valeur moyenne de u en prenant la racine carrée de la somme des carrés de toutes ses valeurs particulières divisée par leur nombre. Or, si nous laissons ces valeurs particulières sous la forme susdite, en faisant la somme des carrés, tous les doubles produits tels que $2\frac{df}{d\mathrm{A}}\frac{df}{d\mathrm{B}}\alpha\beta$, ... disparaîtront, puisqu'à chaque valeur positive de α ou de β ou de γ correspond une valeur négative de même ordre de grandeur (d'après le caractère même des erreurs accidentelles). On aura donc finalement, en prenant la racine carrée de la moyenne de cette somme de carrés,

$$u = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{d\mathrm{A}}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{df}{d\mathrm{B}}\right)^2\beta^2 + \left(\frac{df}{d\mathrm{C}}\right)^2\gamma^2},$$

puisque α^2, β^2, γ^2 sont considérés comme les moyennes des carrés de toutes les erreurs dont A, B, C sont susceptibles.

Cela revient à différentier U par rapport à A, B, C, à remplacer dA, dB, dC par α, β, γ et à extraire la racine carrée de la somme des carrés de ces divers termes.

Première application. — *Nous avons trouvé, pour la moyenne de m mesures n, n', n'', ... d'une quantité x,*

$$x = \frac{[n]}{m},$$

et, en désignant par ε, ε', ... *les écarts des mesures individuelles avec la moyenne, nous avons vu que l'erreur moyenne d'une mesure isolée est*

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}} \qquad \text{ou plutôt} \qquad \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}.$$

Quelle sera l'erreur à craindre sur la moyenne elle-même ?

Ici x est une fonction bien simple des mesures n, n', n'', ..., car

$$x = \frac{n}{m} + \frac{n'}{m} + \frac{n''}{m} + \ldots.$$

L'erreur moyenne de ces divers termes est $\pm\frac{\varepsilon_1}{m}$; donc celle de x

sera

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2+\ldots}=\pm\sqrt{m\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2}=\pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}.$$

Par exemple, l'erreur moyenne à craindre sur la moyenne de 100 mesures, effectuées à $1'$ près, sera, non pas $\frac{1'}{100}$, mais $\frac{1'}{10}$, et, pour réduire de moitié l'erreur à craindre sur des mesures faites à la minute près, il faut prendre la moyenne de 4 mesures indépendantes. En d'autres termes, la précision d'une moyenne n'est pas proportionnelle au nombre des mesures individuelles, mais seulement à la racine carrée de ce nombre.

Seconde application. — *Pour obtenir la surface d'un rectangle, on en a mesuré les côtés a et b, le premier avec une erreur moyenne* $\pm\alpha$, *le second à* $\pm\beta$ *près. Quelle est l'erreur à craindre sur la surface conclue ab ?*

On aura, pour cette erreur,

$$\pm\sqrt{(b\alpha)^2+(a\beta)^3}.$$

De même l'erreur à craindre sur une ligne a mesurée en deux parts b et c, de sorte que $a = b + c$, sera

$$\partial a=\pm\sqrt{(\partial b)^2+(\partial c)^2},$$

en donnant aux différentielles da, db, dc le sens d'erreurs moyennes avec le signe ∂.

Troisième application. — *On a à calculer le côté a d'un triangle sphérique; le côté b et les angles* A *et* B *sont affectés d'erreurs moyennes* $\pm db$, $\pm d\mathrm{A}$, $\pm d\mathrm{B}$. *Quelle est l'erreur à craindre sur le côté a ?*

Employons l'analogie des quatre sinus :

$$\sin a\sin\mathrm{B}=\sin b\sin\mathrm{A},$$

nous aurons, en différentiant cette expression après en avoir pris les logarithmes,

$$\frac{da}{\operatorname{tang} a}=\frac{db}{\operatorname{tang} b}+\frac{d\mathrm{A}}{\operatorname{tang}\mathrm{A}}-\frac{d\mathrm{B}}{\operatorname{tang}\mathrm{B}},$$

puis, en donnant aux différentielles la signification d'erreurs moyennes,

$$\partial a = \pm \operatorname{tang} a \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\operatorname{tang} b}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\operatorname{tang} A}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\operatorname{tang} B}\right)^2}.$$

Quatrième application. — *L'erreur d'une détermination de l'heure dépend des erreurs commises sur* λ *et* z :

$$d\mathrm{H} = \frac{dz}{\sin\lambda \sin A} + \frac{d\lambda}{\operatorname{tang} A \sin\lambda}.$$

L'erreur à craindre sur $d\mathrm{H}$ sera donc

$$(d\mathrm{H}) = \pm \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{\sin\lambda \operatorname{tang} A}\right)^2 + \left(\frac{dz}{\sin\lambda \sin A}\right)^2}.$$

De même, s'il s'agissait d'une colatitude, on aurait

$$(d\lambda) = \pm \sqrt{(\sin\lambda \operatorname{tang} \mathrm{H})^2 + \left(\frac{d\lambda}{\cos A}\right)^2}.$$

Erreur moyenne des solutions fournies par la méthode de Legendre.

Soient, pour fixer les idées, m équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} ax + by &= n, \\ a'x + b'y &= n', \\ a''x + b''y &= n'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Les équations finales seront

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y &= [an], \\ [ab]x + [bb]y &= [bn]. \end{aligned}$$

Pour avoir l'erreur de x en fonction des erreurs ε, ε', ε'', ... des données n, n', n'', ..., différentions x par rapport à ces quantités, conformément à la prescription du paragraphe précédent. Puisque

$$x = \frac{[an][bb] - [ab][bn]}{[aa][bb] - [ab]^2},$$

nous aurons, en désignant pour un instant le dénominateur par D,

$$\begin{aligned} D\partial x = &\left\{ [bb]\,a - [ab]\,b \right\} \partial n, \\ &+ \left\{ [bb]\,a' - [ab]\,b' \right\} \partial n', \\ &+ \left\{ [bb]\,a'' - [ab]\,b'' \right\} \partial n'' + \ldots . \end{aligned}$$

Par suite, on aura, en faisant la somme des carrés de ces termes en ∂n, $\partial n'$, $\partial n''$, ... et en remplaçant ∂n^2, $\partial n'^2$, $\partial n''^2$, ... par leur valeur moyenne ε_1^2,

$$D^2\,\partial x^2 = \left\{ [bb]^2[aa] + [ab]^2[bb] - 2[bb][ab][ab] \right\} \varepsilon_1^2.$$

Si l'on réduit les termes semblables, et que l'on mette $[bb]$ en facteur commun, cette équation devient

$$D^2\partial x^2 = [bb]\,D\varepsilon_1^2, \qquad \text{d'où} \qquad \partial x = \sqrt{\frac{[bb]}{D\,\varepsilon_1^2}}$$

Or $\frac{[bb]}{D}$ est la valeur qu'on obtiendrait pour x lui-même si, dans les équations finales, on remplaçait $[an]$ par 1 et $[bn]$ par 0.

De même, l'erreur moyenne de y ou ∂y sera $\sqrt{\frac{[aa]}{D}}\,\varepsilon_1$, c'est-à-dire ε_1 multiplié par la racine carrée de la valeur qu'on déduirait pour y si, dans les équations finales, on remplaçait an par 0 et bn par 1. Ces prescriptions sont dues à Gauss.

S'il y avait trois inconnues, on aurait pareillement à résoudre les équations finales

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z &= [an], \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z &= [bn], \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z &= [cn]. \end{aligned}$$

Les valeurs de x, y, z, ... étant obtenues, on aurait leurs erreurs moyennes en remplaçant x, y, z par x', y', z' et en résolvant trois fois les mêmes équations avec les seconds membres remplacés successivement par

1, 0, 0 pour x', 0, 0, 1, pour y', 0, 0, 1 pour z',

et les erreurs moyennes de x, y, z seraient $\varepsilon_1\sqrt{x'}$, $\varepsilon_1\sqrt{y'}$, $\varepsilon_1\sqrt{z'}$.

Exemples d'application de la méthode des moindres carrés.

Premier exemple. — La longueur l du pendule simple qui bat la seconde est liée à l'aplatissement μ du globe terrestre par l'équation de Clairaut,

$$l = l' + \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) l' \cos^2\lambda,$$

où l' représente la longueur du pendule à l'équateur, q le rapport $\frac{1}{289}$ de la force centrifuge à la pesanteur, toujours à l'équateur, et λ la colatitude. Voici diverses mesures de l effectuées en divers points du globe par les différents observateurs :

	λ.	l.
	° ′	mm
Au Spitzberg.....	10.10	996,13
Pétrograd.....	30. 3	994,97
New-York.....	49.17	993,24
La Jamaïque.....	72. 4	991,56
Ile Saint-Thomas.....	89.35	991,19
Rio-de-Janeiro.....	112.55	991,77
Montevideo...	124.54	992,70
Cap Horn.....	145.51	994,62
New Shetland	152.56	995,23

Posons, pour abréger,

$$l = 991^{mm} + x, \qquad \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) l' = y;$$

nous aurons, pour déterminer x et y, les équations

$$\begin{aligned}
5,13 &= x + 0,969\,y,\\
3,97 &= x + 0,749\,y,\\
2,24 &= x + 0,426\,y,\\
0,56 &= x + 0,095\,y,\\
0,19 &= x.\\
0.77 &= x + 0,152\,y,\\
1,70 &= x + 0,327\,y,\\
3,62 &= x + 0,685\,y,\\
4,23 &= x + 0,793\,y.
\end{aligned}$$

La première équation finale (relative à x) s'obtient simplement

en faisant la somme de ces équations :

$$22,41 = 9x + 4,196y. \tag{1}$$

Pour avoir l'équation relative à y, multipliez chacune des équations proposées par le coefficient correspondant de y :

$$\begin{aligned}
4^{mm},97 &= 0,969x + 0,938y,\\
2,97 &= 0,749x + 0,561y,\\
0,95 &= 0,426x + 0,181y,\\
0,05 &= 0,095x + 0,009y,\\
0 \quad &\quad 0 \quad\quad 0\\
0,12 &= 0,152x + 0,023y,\\
0,56 &= 0,327x + 0,107y,\\
2,48 &= 0,685x + 0,469y,\\
3,35 &= 0,793x + 0,629y.
\end{aligned}$$

Leur somme fournit l'équation

$$15,45 = 4,196x + 2,917y. \tag{2}$$

La résolution des équations (1) et (2) donne

$$\begin{aligned}
x &= 0^{mm},066,\\
y &= 5^{mm},20;
\end{aligned}$$

par conséquent, la longueur du pendule est

A l'équateur.....	$991^{mm},066$
Aux pôles.....	$996^{mm},266$

Remarquez que y est une fonction de l'aplatissement μ; connaissant actuellement y, nous en pourrons déduire μ par la relation

$$\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{289} - \mu\right)991,066 = 5,20;$$

elle donne

$$\mu = \frac{1}{294}.$$

Il nous reste à déterminer l'erreur à craindre sur chaque résultat. Pour cela, il faut chercher d'abord l'erreur moyenne de ces mesures de l. En portant dans les équations de condition les valeurs de x et de y, nous aurons les résidus ε, ε', ε'', ... :

Nombres observés.	Nombres calculés.	Calc. — obs. ou valeurs de ε.	Carrés, c'est-à-dire $\varepsilon\varepsilon$.
5,13	5,11	— 0,02	0,0004
3,97	3,96	— 0,01	0,0001
2,24	2,28	+ 0,04	0,0016
0,56	0,56	0	0
0,19	0,07	— 0,12	0,0144
0,77	0,86	+ 0,09	0,0081
1,70	1,77	+ 0,07	0,0049
3,62	3,63	+ 0,01	0,0001
4,23	4,19	— 0,04	0,0016
			0,0272

La somme $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0272$, par conséquent, l'erreur moyenne d'une de ces mesures sera

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{0{,}0272}{9-2}} = \pm 0{,}067,$$

puisque 9 est le nombre des équations et 2 celui des inconnues.

Quant à l'erreur à craindre sur les nombres trouvés pour x et y, nous résoudrons les deux systèmes :

$$\left.\begin{aligned} 9{,}000\,x' + 4{,}196\,y' &= 1 \\ 4{,}196\,x' + 2{,}917\,y' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{1}{2{,}96},$$

$$\left.\begin{aligned} 9{,}000\,x' + 4{,}196\,y' &= 0 \\ 4{,}196\,x' + 2{,}917\,y' &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{0{,}96}.$$

Par suite, l'erreur à craindre sur x, ou $\varepsilon_1\sqrt{x'}$, sera

$$\pm \frac{0^{mm},067}{\sqrt{2{,}96}} = \pm 0^{mm},039,$$

et sur y

$$\varepsilon_1\sqrt{y'} = \pm \frac{0^{mm},067}{\sqrt{0{,}96}} = \pm 0^{mm},068.$$

Il est très intéressant de savoir avec quelle précision l'aplatissement μ est déterminé par ces anciennes mesures du pendule en divers lieux de la Terre. La relation

$$\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{289} - \mu\right)(991^{mm} + x) = y$$

donne, en différentiant par rapport à μ, x, y, mais en remar-

quant que ∂x peut être négligé à cause du très petit facteur qui le multiplie,

$$\partial\mu = \pm \frac{\partial\nu}{991} = \pm 0{,}000068.$$

Cela revient à dire que l'incertitude du dénominateur de $\frac{1}{294}$, valeur trouvée pour μ, est de ± 6 unités.

Deuxième exemple. — Pour utiliser les clichés de la Carte du Ciel à la détermination des coordonnées $\mathcal{R}$ et δ des étoiles, on mesure les coordonnées rectangulaires de celles-ci par rapport à des axes provisoires rectangulaires tracés sur le cliché photographique et dont l'un est parallèle au plan méridien du lieu d'observation.

Les erreurs systématiques sont dues à ce que : 1° la plaque n'est jamais bien centrée; 2° les axes tracés sur cette plaque ne sont jamais bien orientés; 3° la plaque n'est pas placée rigoureusement au foyer de l'objectif, d'où résulte une modification de l'échelle; 4° la plaque est inclinée sur l'axe optique de la lunette. Il en résulte que les coordonnées x et y mesurées ne donneront pas immédiatement les valeurs $(\mathcal{R}_0 - \mathcal{R})\sin\delta$ et $\delta_0 - \delta$ à ajouter à l'ascension droite et à la déclinaison de l'origine et que, de plus, les valeurs $\mathcal{R}_0$ et δ_0 ne correspondent pas rigoureusement au point origine des coordonnées.

Supposons que les coordonnées mesurées d'un astre étant x et y, les coordonnées vraies soient $x + \xi$ et $y + \eta$. Les corrections ξ et η pourront être données par deux formules :

$$\xi = A + B\,x + C\,y,$$
$$\eta = A' + B'x + C'y,$$

où les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ sont des constantes inconnues, petites et dépendant des quatre causes ci-dessus, que nous allons chercher à déterminer.

On connaît par des observations antérieures précises, faites aux instruments méridiens des grands observatoires, les coordonnées d'un certain nombre d'étoiles repères qui se trouvent photographiées sur la plaque. Si les observations qui ont fourni les coordonnées de ces étoiles repères n'étaient pas elles-mêmes entachées d'erreurs accidentelles, trois étoiles suffiraient pour

déterminer les constantes, chacune d'elles fournissant deux équations entre les six coefficients inconnus. Mais, en raison des erreurs d'observation dont peuvent être affectées les étoiles fondamentales, nous en prendrons n sur le cliché au lieu de trois; nous aurons ainsi un système d'équations incompatibles et pour en tirer les valeurs les plus plausibles des six inconnues, nous appliquerons la méthode des moindres carrés.

Nous aurons pour déterminer A, B et C les trois équations linéaires suivantes, en remarquant que les valeurs des ξ sont données par la différence entre les x mesurés et les x calculés connaissant les ascensions droites $\mathcal{R}$ des étoiles repères $\xi = (\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}) \sin \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \Sigma\xi &= n\mathrm{A} + \mathrm{B}\Sigma x + \mathrm{C}\Sigma y , \\ \Sigma\xi x &= \mathrm{A}\Sigma x + \mathrm{B}\Sigma x^2 + \mathrm{C}\Sigma xy, \\ \Sigma\xi y &= \mathrm{A}\Sigma y + \mathrm{B}\Sigma xy + \mathrm{C}\Sigma y^2 , \end{aligned}$$

d'où les trois inconnues A, B et C. On déterminerait de même A′, B′, C′.

Observations conditionnelles.

Ici les m grandeurs à déterminer par l'observation n'étant plus indépendantes, mais devant satisfaire à n relations qui doivent être rigoureusement satisfaites, on pourrait se contenter de mesurer $m - n$ d'entre elles, et déduire les n autres des relations de condition. Au lieu de cela, et pour avoir, comme l'on dit, des vérifications, on mesure cependant les m grandeurs, et comme les observations sont toujours affectées de petites erreurs accidentelles, les relations de condition ne sont pas rigoureusement satisfaites; il y a ce que l'on appelle des *erreurs de fermeture*. Le problème consiste, ainsi que nous l'avons dit déjà, à déterminer les corrections, à apporter aux grandeurs observées, qui nous paraîtront les plus plausibles, et qui soient, en outre, telles que les grandeurs corrigées satisfassent rigoureusement aux équations de condition.

Par analogie avec le cas des observations directes et le cas des observations indirectes, on détermine les corrections x, y, z, ... par la condition que la somme de leurs carrés soit un minimum.

Remarquons que les équations de condition $f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots) = 0$ entre les grandeurs se transforment immédiatement en équations

entre les corrections, puisqu'on connaît toujours, dans les sciences d'observation, des valeurs approchées des grandeurs à déterminer. On aura donc :

$$A = A_0 + x,$$
$$B = B_0 + y,$$

A_0, B_0, ... étant les valeurs approchées, x, y, ... les corrections et l'équation de condition deviendra une équation

$$\psi(x, y, \dots) = 0$$

entre les corrections.

Pour établir la règle de détermination des corrections, nous envisagerons le problème analytiquement dans toute sa généralité.

Soit une fonction de quatre variables par exemple,

$$F(x, y, z, u) = U,$$

qu'il s'agit de rendre minimum, avec la condition que les inconnues satisfassent aux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, u) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z, u) = 0. \end{cases}$$

Si les variables étaient indépendantes, la condition de minimum serait

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0,$$

quels que soient dx, dy, dz et du, c'est-à-dire que les différentes dérivées devraient être séparément nulles.

Mais les accroissements ne sont pas indépendants, et la différentiation des équations de condition (1) donne :

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}du = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}du = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc éliminer deux des accroissements entre les équations (2) et (3), et il restera une relation où n'entreront plus que dz et du et qui devra être identiquement satisfaite. On obtiendra ainsi deux équations en égalant à zéro les coeffi-

cients de dz et de du, qui, jointes aux deux équations (1), donnent quatre équations pour déterminer les quatre inconnues.

Employons, pour faire l'élimination, la *méthode des coefficients indéterminés*. Multiplions les équations (3) par les indéterminées λ_1 et λ_2, et ajoutons-les à l'équation (1); il viendra :

$$dx\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right]+dy[\ldots]+dz[\ldots]+du[\ldots]=0,$$

équation qui, en raison des indéterminées, devra être identiquement satisfaite. On devra donc avoir :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}=0, \end{cases}$$

équations qui portent le nom d'*équations corrélatives*.

Supposons-les résolues par rapport aux inconnues :

$$(5)\qquad \begin{cases} x=a\ \lambda_1+b\ \lambda_2+c\ , \\ y=a'\lambda_1+b'\lambda_2+c'\ , \\ z=a''\lambda_1+b''\lambda_2+c''\ , \\ u=a'''\lambda_1+b'''\lambda_2+c'''. \end{cases}$$

Introduisons ces valeurs des inconnues dans les équations (1), nous aurons les équations dites *équations normales* :

$$(6)\qquad \begin{cases} f_1(\lambda_1,\lambda_2)=0, \\ f_2(\lambda_1,\lambda_2)=0, \end{cases}$$

d'où l'on tirera les valeurs de λ_1 et λ_2 qui, introduites dans les équations corrélatives (5), donneront les valeurs des inconnues. D'où la règle suivante : pour rendre minimum une fonction des inconnues, sous la condition que ces dernières satisfassent rigoureusement à certaines équations de condition, on forme la fonction

$$\begin{aligned} U=F(x,y,z,\ldots)&+\lambda_1\varphi_1(x,y,z,\ldots) \\ &+\lambda_2\varphi_2(x,y,z,\ldots) \\ &+\lambda_3\varphi_3(x,y,z,\ldots)+\ldots \end{aligned}$$

à l'aide des indéterminées λ_1, λ_2, λ_2, ..., dont on écrit les conditions de minimum absolu. On obtient ainsi, en y ajoutant les équations de condition, un nombre d'équations égal au nombre des inconnues et des indéterminées, ce qui résout le problème.

Exemple. — On a mesuré les trois angles d'un triangle sphérique, et l'observation donne les valeurs α, β, γ. A cause des erreurs accidentelles, elles ne satisfont pas à l'équation de condition qui doit être rigoureusement satisfaite, A, B et C étant les angles corrigés,

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon, \tag{1}$$

ε étant l'excès sphérique. Il y a une erreur de fermeture, et l'on a

$$A + B + C = 180^\circ + E + \varepsilon. \tag{2}$$

Il s'agit de corriger les trois angles de façon que la somme des carrés des corrections soit un minimum, et que les valeurs ainsi corrigées satisfassent rigoureusement à l'équation (1).

A, B, C étant les angles corrigés, nous aurons :

$$A = \alpha + x,$$
$$B = \beta + y,$$
$$C = \gamma + z.$$

La fonction à rendre minimum est

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

et l'équation de condition

$$x + y + z + E = 0;$$

formons la fonction, en employant l'indéterminée $-2\lambda_1$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda_1(x + y + z + E),$$

et écrivons les conditions de minimum absolu; il viendra les équations corrélatives

$$x = \lambda_1, \qquad y = \lambda_1, \qquad z = \lambda_1$$

et l'équation normale

$$3\lambda_1 + E = 0, \qquad \lambda = -\frac{E}{3}.$$

les corrections sont :

$$x = -\frac{E}{3},$$

$$y = -\frac{E}{3},$$

$$z = -\frac{E}{3}.$$

Donc, on corrige les trois angles d'un triangle en retranchant de chacun d'eux le tiers de l'erreur de fermeture.

Nous trouverons en Géodésie d'autres exemples relatifs aux observations conditionnelles.

CHAPITRE X.

OBSERVATIONS D'INÉGALE PRÉCISION.

Nous avons supposé jusqu'ici que toutes nos observations avaient été faites dans les mêmes conditions, nous inspiraient même confiance, et que, par conséquent, leur précision était la même. Mais il peut en être autrement, et les observations être de précisions différentes.

Voici un cas où le simple bon sens indique immédiatement ce qu'il y a à faire. La colatitude d'une station a été déterminée à deux époques différentes, la première fois par une série de m observations, la seconde fois par une série de m' mesures de même précision. On a trouvé les valeurs λ et λ'. Comment doit-on combiner ces résultats, qui ne sauraient inspirer même degré de confiance puisque m est différent de m' ?

Si nous avions sous les yeux les observations primitives, elles se présenteraient sous la forme

Première série.	Seconde série.
$\lambda = n$	$\lambda' = \mathrm{N}$
$\lambda = n'$	$\lambda' = \mathrm{N}'$
$\lambda = n''$	$\lambda' = \mathrm{N}''$
.....	.....
Moyenne : $\lambda = \dfrac{[n]}{m}$	Moyenne : $\lambda' = \dfrac{[\mathrm{N}]}{m'}$

Il n'y aurait qu'à prendre la moyenne générale, c'est-à-dire

$$\frac{[n]+[\mathrm{N}]}{m+m'}.$$

Remplaçons, dans cette expression, $[n]$ par $m\lambda$ et $[\mathrm{N}]$ par $m'\lambda'$,

elle deviendra

$$\frac{m\lambda + m'\lambda'}{m + m'}.$$

Il ne faudra donc pas prendre la simple moyenne $\frac{\lambda+\lambda'}{2}$ de λ et de λ', mais bien ce qu'on pourrait appeler leur *centre de gravité* en leur supposant des poids proportionnels aux nombres d'observations m et m' (1).

Plus généralement, pour combiner un certain nombre de résultats λ, λ', λ'', ... dont les *poids* respectifs seraient p, p', p'', ..., il faut multiplier chacun d'eux par son poids et diviser la somme de ces produits par la somme des poids. Nous écrirons donc

$$\frac{p\lambda + p'\lambda' + p''\lambda'' \dots}{p + p' + p'' \dots} \quad \text{ou} \quad \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Le poids de ce résultat sera évidemment $[p]$.

Dans l'exemple précédent, nous avons obtenu immédiatement les poids des valeurs λ, λ', λ'', ..., parce que nous supposions connus les nombres d'observations supposées elles-mêmes d'égale précision. Il arrive souvent que ces nombres ne sont pas donnés; on n'a que les erreurs moyennes assignées par les observateurs à leurs résultats λ, λ', λ'', ... Désignons ces erreurs moyennes par e, e', e'', ..., puis imaginons que le résultat λ provienne de la moyenne de p observations affectées de l'erreur moyenne E, que λ' résulte pareillement de p' mesures de même précision, et ainsi de suite. Il suffira que les nombres p, p', p'', ... satisfassent aux relations

$$(1) \qquad e = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{p}}, \qquad e' = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{p'}}, \qquad e'' = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{p''}}, \qquad \dots,$$

E étant une quantité arbitraire, pour ramener la question au cas précédent, et être autorisé à écrire

$$\frac{p\lambda + p'\lambda' + p''\lambda'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots} \quad \text{ou} \quad \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Le poids du résultat sera $p + p' + p'' + \dots$ ou $[p]$, et son erreur

---

(1) C'est en effet par une formule de ce genre qu'on calcule le centre de gravité d'une droite dont les extrémités, situées aux distances λ et λ' d'un point pris pour origine, seraient chargées des poids m et m'.

moyenne sera

$$\frac{E}{\sqrt{p+p'+p''+\dots}} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\sqrt{[p]}}.$$

Ainsi, les poids à attribuer aux valeurs λ, λ', ... n'étant assujettis qu'à être inversement proportionnels aux carrés de leurs erreurs moyennes, on dispose entièrement de l'arbitraire E. Celle-ci sera l'erreur moyenne d'une de ces $p+p'+p''$ ... observations fictives; mais, comme les relations (1) doivent toujours être satisfaites, E sera d'autant plus grand qu'on aura pris des nombres plus grands pour ces poids. Cette arbitraire E porte le nom d'*erreur moyenne de l'observation fictive ayant pour poids l'unité*, ou, plus brièvement, l'*erreur moyenne de l'unité de poids*. Voici un exemple numérique :

On a à combiner les résultats partiels d'inégale précision.

		Erreur moyenne.
λ.....	$40^{\circ}.9'.45''$	$\pm 2'',0$
λ'.....	40.9.48	$\pm 1'',0$
λ''.....	40.9.47	$\pm 0'',5$

Si l'on prend

$$p=\frac{1}{4}, \qquad p'=\frac{1}{1}, \qquad p''=\frac{1}{0,25},$$

l'erreur moyenne E de l'unité de poids sera de $1''$. Pour éviter les fractions, multiplions tous ces poids par 4, nous aurons

$$p=1, \qquad p'=4, \qquad p''=16,$$

et alors $E=\sqrt{4}=2''$. Ainsi λ sera censé résulter d'une seule observation affectée d'une erreur moyenne de $2''$; λ' résulterait de quatre observations pareilles et λ'' de seize. On fera le calcul de la manière suivante, en ne tenant compte que des secondes :

$45'' \times 1$.....	$45''$
48×4.....	192
47×16.....	752
Somme..	989

$\frac{989''}{1+4+16}=47'',1$, avec l'erreur moyenne $\frac{E}{\sqrt{[p]}}=\frac{2''}{\sqrt{21}}=+0'',44$,

et la colatitude conclue sera

$$\lambda = 41^\circ 9' 47'',1 \pm 0'',44.$$

Quand il s'agit d'équations linéaires de la forme

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= n, \\ a'x + b'y + c'z &= n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

et si l'on connaît les erreurs moyennes e, e', ... des mesures n, n', ..., on formera les poids relatifs à ces équations par

$$p = \frac{E^2}{e^2}, \qquad p' = \frac{E^2}{e'^2}, \qquad \cdots,$$

c'est-à-dire en prenant des nombres inversement proportionnels aux carrés de ces erreurs moyennes. Dès lors, la première équation pourra être considérée comme provenant de la moyenne de p équations ayant même premier membre, mais dont les seconds membres seraient fournis par p mesures affectées de l'erreur moyenne E. De même, la deuxième résulterait de p' mesures affectées de la même erreur moyenne E, et ainsi de suite. Nous rentrons ainsi dans le cas des observations d'égale précision et la somme des carrés des erreurs qu'il faut rendre minimum sera

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + \ldots,$$

en désignant ici, comme d'ordinaire, par ε, ε', ... les résidus des équations de condition.

Pour cela, il suffira de multiplier l'équation

$$aa\,x + ab\,y + ac\,z = an$$

par p, l'équation

$$a'a'\,x + a'b'\,y + a'c'\,z = a'n'$$

par p', etc., et d'en faire la somme. Les équations finales seront donc :

$$\begin{aligned} [aap]\,x + [abp]\,y + [acp]\,z &= [anp], \\ [abp]\,x + [bbp]\,y + [bcp]\,z &= [bnp], \\ [acp]\,x + [bcp]\,y + [ccp]\,z &= [cnp]. \end{aligned}$$

Les valeurs des inconnues se déduisent de ces trois équations finales. Quant aux erreurs moyennes, si l'on résout de nouveau les équations finales après avoir accentué les lettres x, y, z et rem-

placé les seconds membres par 1, 0, 0, on aura

$$\text{Erreur moyenne de } x = \mathrm{E}\sqrt{x'}.$$

On opérera de même pour y et z.

Le plus souvent, on ne connaît pas d'avance avec une exactitude suffisante les erreurs moyennes dont les n mesures sont affectées. C'est de sentiment qu'on évalue les poids en prenant des nombres simples 1, 2, 3, ... Dans ce cas, l'erreur moyenne de l'unité de poids doit être déterminée *a posteriori*. On portera donc les valeurs obtenues pour les inconnues dans les équations primitives, on formera les carrés des résidus, on multipliera ces carrés par leurs poids respectifs, et l'on aura

$$\text{Erreur moyenne de l'unité de poids } \mathrm{E} = \pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{m-i}}.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de traiter par la méthode des moindres carrés les observations d'une comète recueillies dans divers observatoires; qu'à Paris les observations aient été faites avec un équatorial de $0^{m},24$; que, dans un observatoire privé, on ait employé une petite lunette non parallactique avec un micromètre annulaire dont les résultats comportent, en général, des erreurs beaucoup plus considérables; enfin qu'une troisième partie des observations ait été faite à Poulkovo avec un objectif de $0^{m},38$ et par une méthode de triangulation (avec de petites étoiles) qui jouit d'une extrême précision. Ici l'attribution des poids devient assez délicate. Le calculateur choisit ordinairement des nombres simples, de manière à donner une prépondérance suffisante aux observations réputées les plus précises. Sans doute, on réduirait l'arbitraire en recommençant le calcul avec de nouveaux poids déduits des écarts constatés, dans la première solution, entre la théorie et l'observation, mais il ne faut pas oublier que ces écarts eux-mêmes n'expriment pas toujours les véritables erreurs de l'observation quand on n'opère que sur un nombre très limité de données pour déterminer plusieurs inconnues. On peut craindre d'ailleurs que la théorie ne soit pas capable de représenter les phénomènes dans les plus petits détails. Le calculateur est donc tenu à beaucoup de prudence, car, en certains cas, le seul changement des poids fera varier sensiblement les résultats, et une idée préconçue sur la solution à obtenir pourrait aisément exercer quelque influence par l'intermédiaire de ce choix.

RÉSUMÉ DES FORMULES RELATIVES A LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

OBSERVATIONS D'ÉGALE PRÉCISION.

1° *Moyenne arithmétique.*

m équations de condition.	Résidus.	Carrés.
$x = n$	ε	$\varepsilon\varepsilon$
$x = n'$	ε'	$\varepsilon'\varepsilon'$
$x = n''$	ε''	$\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	.....
Éq. finale. $\overline{mx = [n]}$	Somme....	$\overline{[\varepsilon\varepsilon]}$

Solution.. $x = \dfrac{[n]}{m}$

Erreur moyenne d'une observation.... $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}$

Erreur moyenne de la valeur de x... $\pm\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$

2° *Équations linéaires à plusieurs inconnues.*

m équations de condition.	Résidus.	Carrés.
$ax + by = n$	ε	$\varepsilon\varepsilon$
$a'x + b'y = n'$	ε'	$\varepsilon'\varepsilon'$
$a''x + b''y = n''$	ε''	$\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	.....
	Somme...	$\overline{[\varepsilon\varepsilon]}$

Équations finales.

$[aa]x + [ab]y = [an]$
$[ab]x + [bb]y = [an]$
d'où x et y.

Err. moyenne d'une observation..... $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-2}}$

Calcul des erreurs moyennes de x et de y.

$[aa]x' + [ab]y' = 1$
$[ab]x' + [bb]y' = 0$
d'où x'.

Erreur moyenne de la valeur de x..... $\pm\varepsilon_1\sqrt{x'}$

$[aa]x' + [ab]y' = 0$
$[ab]x' + [bb]y' = 1$
d'où y'.

Erreur moyenne de la valeur de y..... $\pm\varepsilon_1\sqrt{y'}$

OBSERVATIONS D'INÉGALE PRÉCISION.

1° *Moyenne arithmétique.*

m équations de condition.	Poids.	Résidus.	Carrés × Poids.
$x = a$	p	ε	$p\varepsilon\varepsilon$
$x = a'$	p'	ε'	$p\varepsilon'\varepsilon'$
$x = a''$	p''	ε''	$p\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	...	.....
Éq. finale $\overline{[p]x = [pa]}$		Somme...	$\overline{[p\varepsilon\varepsilon]}$

Solution.. $x = \dfrac{[pa]}{[p]}$

Erreur moyenne de l'unité de poids. $E = \pm\sqrt{\dfrac{[p\varepsilon\varepsilon]}{[m-1]}}$

Erreur moyenne de la valeur de x. $\pm\dfrac{E}{\sqrt{[p]}}$

2° *Équations linéaires à plusieurs inconnues.*

m équations de condition.	Poids.	Résidus.	Carrés × Poids.
$ax + by = n$	p	ε	$p\varepsilon\varepsilon$
$a'x + b'y = n'$	p'	ε'	$p'\varepsilon'\varepsilon'$
$a''x + b''y = n''$	p''	ε''	$p''\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	...	.....
		Somme...	$\overline{[p\varepsilon\varepsilon]}$

Équations finales.

$[aap]x + [abp]y = [anp]$
$[abp]x + [bbp]y = [bnp]$
d'où x et y.

Err. moyenne de l'unité de poids. $E = \pm\sqrt{\dfrac{[p\varepsilon\varepsilon]}{m-2}}$

Calcul des erreurs moyennes de x et de y.

$[aap]x' + [abp]y' = 1$
$[abp]x' + [bbp]y' = 0$
d'où x'.

Erreur moyenne de la valeur de x..... $\pm E\sqrt{x'}$

$[aap]x' + [abp]y' = 0$
$[abp]x' + [bbp]y' = 1$
d'où y'.

Erreur moyenne de la valeur de y..... $\pm E\sqrt{y'}$

CHAPITRE XI.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA THÉORIE DES ERREURS.

Nous allons montrer que la théorie des erreurs fortuites d'observation ou de mesure rentre dans celle des probabilités et nous en conclurons une justification de la méthode des moindres carrés.

Nous rappellerons tout d'abord la définition de la probabilité d'un événement ainsi que les théorèmes des probabilités totales et des probabilités composées.

Définition. — *La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à la production de cet événement au nombre total des cas, à condition que tous les cas soient considérés comme également possibles. L'appréciation de cette dernière condition est laissée au bon sens.*

Si une urne contient 100 boules blanches et 500 boules noires, la probabilité de tirer de cette urne une boule blanche sera $\frac{100}{600} = \frac{1}{6}$.

Si l'on jette un dé ayant six faces numérotées de 1 à 6, la probabilité d'amener un de ces numéros, 2 par exemple, sera $\frac{1}{6}$.

D'après cette défintiion, une probabilité exprimée en nombres est toujours une fraction; l'unité représente la certitude.

Théorème des probabilités totales. — *Lorsqu'un événement peut se produire de plusieurs manières différentes, mais de façon qu'il ne puisse arriver que d'une manière à la fois, c'est-à-dire lorsque les différents événements partiels sont exclusifs les uns des autres, sa probabilité est la somme des probabilités partielles.*

Par exemple, si l'on a dans une urne p boules dont q blanches,

p_1 rouges, p_2 vertes, p_2 jaunes, etc., la probabilité d'amener une boule de couleur sera évidemment :

$$\frac{p_1+p_2+p_3\cdots}{p}=\ldots=\frac{p_1}{p}+\frac{p_2}{p}+\frac{p_3}{p}.$$

Théorème des probabilités composées. — *La probabilité de la production simultanée de plusieurs événements indépendants les uns des autres est le produit des probabilités relatives à chacun de ces événements pris à part.*

Par exemple, si l'on joue avec deux dés, la probabilité d'amener *sonnez*, c'est-à-dire les deux 6, sera $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Si l'on a trois urnes contenant l'une 25 boules noires pour 75 boules blanches, la deuxième 50 boules noires et 50 boules blanches, la troisième 75 boules noires et 25 blanches, la probabilité de tirer trois boules noires en puisant une fois dans chaque urne sera

$$\frac{25}{100}\times\frac{50}{100}\times\frac{75}{100}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}.$$

Loi de probabilité des erreurs.

Lorsque l'on examine la valeur des erreurs apparentes de diverses séries d'observations, c'est-à-dire la valeur des écarts existant entre les observations et la valeur de la grandeur à déterminer, obtenue soit par la moyenne, soit par la méthode de Legendre, soit en comparant les résultats des observations aux valeurs corrigées dans les observations conditionnelles, on voit que ces écarts, que l'on considère comme étant les erreurs accidentelles des observations, sont toujours tels que leurs signes sont indifféremment positifs ou négatifs, que ce sont les petits écarts qui sont les plus nombreux et que les autres le sont d'autant moins qu'ils sont plus forts.

Ce fait d'expérience se constate dans toutes les sciences d'observation, pour toutes les mesures, quelle que soit leur nature : le fait est général.

Dès lors, puisque les plus petits écarts sont les plus nombreux et puisque le nombre de ces écarts compris entre deux limites

dont l'intervalle est constant, diminue quand la valeur absolue des limites augmente, il est légitime de se demander s'il n'y aurait pas une relation entre le nombre des écarts compris entre deux limites a et b, et le nombre total des écarts, c'est-à-dire s'il n'y aurait pas une loi de répartition des erreurs accidentelles.

Recherche théorique de cette loi.

Les théoriciens ont cherché à l'établir *a priori* au moyen d'une hypothèse sur l'essence des erreurs accidentelles. Supposons, ont-ils dit, qu'il n'y ait pas de distinction essentielle à faire entre celles-là et les systématiques, et que les premières soient dues à des causes constantes, comme les secondes, mais en très grand nombre. Admettons, de plus, que chaque cause produise des erreurs ne pouvant dépasser une très petite quantité α, toujours la même, et affectant indifféremment les deux sens, positif et négatif. Cette hypothèse nous replace dans le cas très particulier que nous avons considéré, page 69, dans l'emploi des tables de logarithmes. Admettons, enfin, que les erreurs accidentelles observées résultent de toutes les combinaisons possibles d'un nombre très grand m de ces petites erreurs élémentaires. Le Calcul des probabilités montre que ces combinaisons seront exprimées par les coefficients du binome $(1 + x)$, et une analyse fort simple établit que la différence entre deux coefficients successifs devient, en passant à la limite où $m = \infty$, la dérivée de la loi de probabilité des erreurs qu'une simple intégration fera dès lors connaître. Nous nous bornerons à signaler cette conception *a priori* et nous considérerons les choses d'un nouveau point de vue. Nous allons appliquer ici la méthode expérimentale, c'est-à-dire chercher, par expérience, s'il existe une relation entre la probabilité d'une erreur et la grandeur de cette erreur, puis opérant par des mesures réellement faites, sur des écarts dûment constatés, nous tâcherons de découvrir graphiquement cette loi.

Recherche empirique de la loi de probabilité des erreurs fortuites.

Prenons, en premier lieu, des observations astronomiques. Pour déterminer la position du point vernal, origine des ascensions

droites, Bradley a observé 470 fois, à la lunette méridienne de l'Observatoire de Greenwich, la différence d'Æ entre le Soleil et une certaine étoile. Bessel a réduit avec beaucoup de soin ces 470 observations, dont la moyenne donne la position du point vernal d'une manière très exacte. En comparant cette moyenne avec chaque observation, on obtient 470 écarts, qui représentent à très peu près les erreurs réellement commises. On a obtenu ainsi, pour l'erreur moyenne $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{470-1}}$, la valeur $\pm 0^s,39$. C'est l'erreur à craindre sur une mesure isolée. Quant à l'erreur à craindre sur la moyenne, elle se réduit, comme nous l'avons vu, à

$$\pm\frac{0^s,39}{\sqrt{470}} = 0^s,017.$$

On voit donc que cette moyenne est à très peu près l'expression de la vérité; par suite, les 470 écarts ci-dessus mentionnés représentent de très près les erreurs réellement commises.

Or, en examinant le Tableau de ces 470 erreurs, on constate, quant aux signes, qu'elles sont indifféremment et en pareil nombre positives ou négatives; quant à la grandeur, on trouve que :

Entre $0^s,0$	et $0^s,1$,	il y a	94	erreurs, tant positives	que négatives.
» 0,1	» 0,2	»	88	»	»
» 0,2	» 0,3	»	78	»	»
» 0,3	» 0,4	»	58	»	»
» 0,4	» 0,5	»	51	»	»
» 0,5	» 0,6	»	36	»	»
» 0,6	» 0,7	»	26	»	»
» 0,7	» 0,8	»	14	»	»
» 0,8	» 0,9	»	10	»	»
» 0,9	» 1,0	»	7	»	»
Au-dessus de 1,0		»	8	»	»

Ainsi, à en juger par cette série, la probabilité qu'une erreur soit comprise entre 0″ et 0″,1, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{\text{nombre des erreurs de cet ordre}}{\text{nombre total des erreurs}}$$

est $\frac{94}{470}$, tandis que la probabilité des erreurs plus fortes, c'est-à-dire $\frac{88}{470}$, $\frac{78}{470}$, ..., va en décroissant.

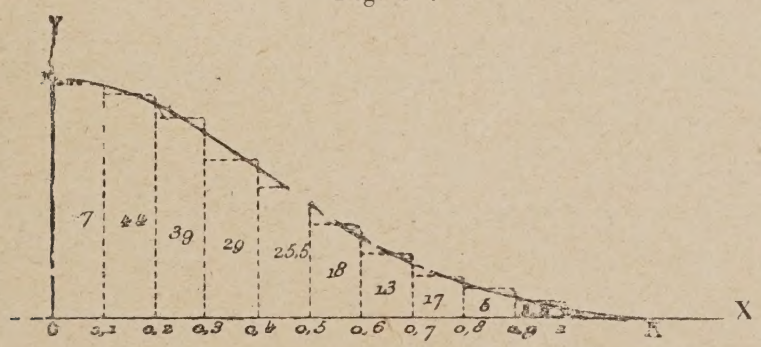
Évidemment, ces fractions ou ces probabilités suivent une cer-

taine loi : cherchons-la empiriquement à l'aide d'une construction graphique.

Si l'on choisit un système d'axes des x et des y, et que l'on porte les erreurs sur l'axe des x, on ne saurait porter les probabilités correspondantes sur l'axe des y, car la probabilité d'une erreur x déterminée, c'est-à-dire comprise entre x et $x + dx$, doit être infiniment petite; elle n'est finie que si les limites de l'erreur diffèrent elles-mêmes d'une quantité finie. On est donc conduit à chercher graphiquement une courbe $y = f(x)$ telle que les probabilités ci-dessus soient représentées par les aires comprises entre les couples d'ordonnées qui répondent aux abscisses 0^s et $0^s,1$, $0^s,1$ et $0^s,2$, ... Comme il y a autant d'erreurs négatives que d'erreurs positives, cette courbe devra être symétrique de part et d'autre de l'axe des y; en second lieu, entre les ordonnées relatives à $x = 0$ et $x = +0^s,1$, l'aire devra être la même qu'entre les ordonnées de $x = 0$ et $x = -0^s,1$, c'est-à-dire $\frac{94}{2}$ ou 47. On obtiendra cette courbe en divisant l'axe des x en parties proportionnelles à $0^s,1$, $0^s,2$, $0^s,3$, ... et en construisant sur les intervalles de 0^s à $0^s,1$, de $0^s,1$ à $0^s,2$, ... des rectangles proportionnels aux nombres 47, 44, ..., puis en traçant un trait continu qui laisse, en dedans, de petites aires triangulaires équivalentes à celles qu'il laissera en dehors.

La courbe suivante, dont nous ne donnons que la moitié située

Fig. 86.



du côté des x positifs, représentera, par ses aires, la loi de probabilité des erreurs comptées sur les abscisses.

Elle se rapproche évidemment du genre de celles qui ont pour équation $y = ae^{-h^2x^2}$, a et h étant des paramètres à déterminer. Si, en effet, on les détermine par deux de ces points, on verra que la

courbe $y = 47{,}365\, e^{-(1{,}764)^2 x^2}$ passe à peu près par tous les autres.

La seule différence appréciable consiste en ce que la courbe représentée par cette équation devrait atteindre l'axe des x, comme le fait la courbe que nous venons de tracer, en deux points symétriques par rapport à l'origine o, dont les abscisses $x = \pm k$ représenteraient les erreurs limites, impossibles à commettre dans ce genre d'observations. Au lieu de cela, la courbe

$$y = 47{,}365\, e^{-(1{,}764)^2 x^2}$$

est en réalité asymptote à l'axe des x. Mais les lignes de cet ordre s'approchent si rapidement de l'axe des x, qu'au delà de l'abscisse $\pm k$, leur aire devient entièrement négligeable, comme on le verra plus tard.

Nous regarderons donc comme empiriquement établi avec toute l'exactitude désirable que, pour le genre d'observations ici considéré, la probabilité P d'une erreur comprise entre les limites finies x et $x + \Delta x$, ou, en d'autres termes, le rapport

$$\frac{\text{aire de la courbe comprise entre les ordonnées correspondantes}}{\text{aire totale de la courbe}},$$

aura pour expression

$$\mathrm{P} = \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} a e^{-h^2 x^2}\, dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2}\, dx},$$

car, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, il est permis de remplacer, sans erreur sensible,

$$\int_{-k}^{+k} a e^{-h^2 x^2}\, dx \quad \text{par} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

Or, on sait que l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{h};$$

donc on a finalement

$$\mathrm{P} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_x^{x+\Delta x} e^{-h^2 x^2}\, dx,$$

et la probabilité infiniment petite de l'erreur déterminée x (c'est-à-dire comprise entre x et $x + dx$) sera

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx.$$

Telle est, d'après les excellentes observations de Bradley, la loi de probabilité des erreurs purement accidentelles, c'est-à-dire dégagées de toute erreur systématique. Et nous sommes ici en droit de considérer les choses ainsi, car, dans le système d'observations de Bradley, les erreurs systématiques dues à l'instrument étant sensiblement les mêmes pour l'étoile et pour le Soleil, ces erreurs disparaissent de la différence conclue des Æ.

Mais il faut voir encore si, dans un genre de mesure tout différent, nous retrouverons la même loi de probabilité des erreurs accidentelles.

Le général Didion donne, dans son *Traité des probabilités appliquées au tir*, la série suivante d'épreuves faites avec un pistolet de cavalerie. Ce sont les écarts des balles tirées sur une cible où nous supposerons tracée une ligne verticale. Ces écarts sont donc mesurés dans le sens horizontal. L'arme employée n'ayant pas de déviation constante et les coups ayant été tirés avec le même soin, ces écarts, soit à droite, soit à gauche de la cible, doivent être considérés comme des erreurs accidentelles. En voici le Tableau :

cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
+ 5	+ 10	+ 5	— 31	+ 8	+ 14	+ 8	0	— 23
— 5	+ 13	+ 29	+ 25	+ 22	+ 27	+ 56	— 3	— 26
— 29	+ 22	+ 40	0	— 15	— 13	+ 8	— 31	+ 9
— 7	— 23	— 7	+ 7	— 10	+ 28	— 2	— 12	+ 19
— 4	— 1	+ 13	— 27	+ 2	+ 28	— 37	+ 7	+ 36
+ 11	+ 18	0	— 17	— 23	+ 5	— 2	— 23	— 2
+ 6	+ 3	— 4	+ 10	+ 4	+ 28	+ 2	+ 37	+ 10
— 6	+ 3	— 3	— 2	— 14	0	— 19	— 18	— 11
— 24	— 25	— 27	— 11	— 12	+ 21	+ 9	— 1	+ 17
— 17	+ 5	— 12	— 12	+ 16	— 1	— 2	0	— 8

En faisant la somme des carrés des écarts, divisant par 90 — 1 et extrayant la racine carrée, on trouve l'erreur moyenne d'un coup

$$\varepsilon_1 = \pm 18^{cm},3.$$

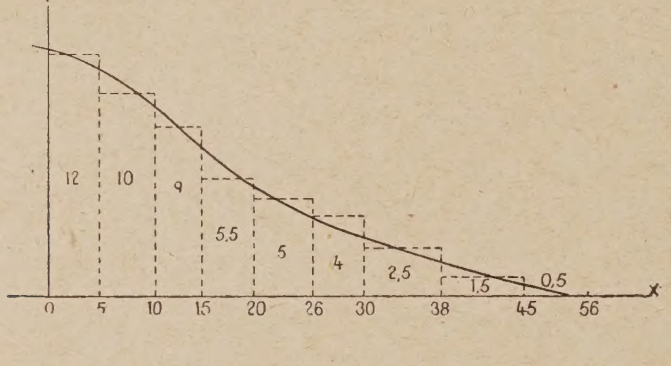
Il y a d'ailleurs 42 erreurs positives, 43 négatives et 5 erreurs

nulles, indifféremment positives ou négatives. Si l'on range ces écarts par ordre de grandeur, sans faire acception des signes, on trouve :

Entre	0 cm	et	5 cm	24	écarts	positifs	ou négatifs.
»	5	»	10.....	20	»	»	
»	10	»	15.....	18	»	»	
»	15	»	21.....	11	»	»	
»	21	»	26.....	10	»	»	
»	26	»	31.....	8	»	»	
»	31	»	38.....	5	»	»	
»	1	»	45.....	3	»	»	
Et au delà de			56.....	1	»	»	

En traçant une courbe dont les abscisses seront 0, 5, 10, 15, ... et telle que les aires comprises entre les ordonnées correspondantes soient proportionnelles aux nombres 12, 10, 9, $5\frac{1}{2}$, 5, 4, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, on obtient la figure 87.

Fig. 87.



Cette courbe est représentée de très près par l'équation

$$y = 11,31\, e^{-(0,0369)^2 x^2}.$$

Elle est donc de même espèce que la précédente.

On trouvera le même résultat dans tous les genres de mesures ou d'observations, pourvu qu'elles ne soient pas affectées d'erreurs systématiques. La Statistique en fournit de nombreux exemples. C'est ainsi que les anomalies accidentelles de la taille humaine suivent la même loi de probabilité; on s'en est assuré aux États-Unis, à l'occasion de la guerre de sécession, en examinant les documents statistiques qu'on y a recueillis sur la taille des contingents militaires. En voici le Tableau :

Sur 10000 *hommes.*

Taille.	Nombre réel.	Formule.
pouces		
61.....	105	100
62.....	169	171
63.....	369	368
64.....	686	675
65.....	1044	1051
66.....	1391	1399
67.....	1584	1584
68.....	1607	1531
69.....	1218	1260
70.....	852	884
71.....	467	531
72.....	277	267
73.....	139	118
74.....	92	61
.....	....	....

La taille moyenne, 67^{pouces}, 24, semble être le type que la nature cherche à réaliser dans cette région, mais qu'elle n'atteint qu'avec des écarts attribuables à des causes multiples et purement accidentelles.

Nous considérerons donc l'intégrale

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2} dx$$

comme représentant très sensiblement la probabilité d'une erreur accidentelle comprise entre $-x$ et $+x$ dans tout sytème de mesure ou d'observation dont le degré de précision sera défini par le paramètre h. C'est la loi de Gauss.

Signification du paramètre h.

Nous allons voir, en effet, que tel est le sens de cette constante. La probabilité de l'erreur x étant

$$\frac{\text{nombre des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx,$$

multiplions les deux membres par x^2; nous aurons

$$\frac{\text{somme des carrés des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}\,dx.$$

En intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, il viendra

$$\text{moyenne des carrés de toutes les erreurs} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Cette moyenne est ce que nous avons déjà désigné par ε_1^2. Quant à l'intégrale qui donne la valeur de ε_1^2 en fonction de h, nous l'obtiendrons aisément en différentiant par rapport à h une autre intégrale définie déjà employée, à savoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

On a ainsi

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} 2hx^2 e^{-h^2x^2}\,dx\,dh = -\frac{\sqrt{2}}{h^2}\,dh.$$

Par conséquent,

$$2\varepsilon_1^2 = \frac{1}{h^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, ε_1 donnant une idée nette de l'exactitude d'un système de mesures, il en sera de même de son inverse h. On devra considérer ce paramètre comme une grandeur proportionnelle au degré de précision. Quant à ε_1, il est aisé de voir que c'est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de probabilité.

On peut constater de même que l'erreur moyenne arithmétique, E, est égale à $\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$.

En effet, multiplions par x les deux membres de l'expression de la probabilité de l'erreur x; nous aurons

$$\frac{\text{somme des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2x^2}\,dx.$$

En intégrant de 0 à $+\infty$ et multipliant par 2 pour avoir la somme des valeurs absolues de toutes les erreurs, il viendra

$$\text{moy. de la somme des valeurs abs. des erreurs} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Pour obtenir l'intégrale, différentions sous le signe somme l'intégrale définie $\int_0^{+\infty} e^{-h^2x^2}dx$, il viendra

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = -2h^2\int_0^{+\infty} x\,e^{-h^2x^2}\,dx,$$

mais cette différentielle est aussi $e^{-h^2x^2}$; prise entre les limites o et $+\infty$, $(e^{-h^2x^2})_0^{+\infty} = -1$; donc

$$\int_0^{+\infty} xe^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{2h^2},$$

d'où

$$E = \frac{1}{2h^2}\times\frac{2h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Erreur probable.

Pour tirer parti de cette théorie, il faut savoir calculer les aires de la courbe de probabilité, c'est-à-dire les valeurs de l'intégrale définie

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

Réduisons l'exponentielle en série, L étant un logarithme népérien :

$$e^{-h^2x^2} = 1 + (\mathrm{L}\,e^{-h^2})\frac{x^2}{1} + (\mathrm{L}\,e^{-h^2})^2\frac{x^4}{1.2} + (\mathrm{L}\,e^{-h^2})^3\frac{x^6}{1.2.3} + \ldots$$

En multipliant par $\frac{h}{\sqrt{\pi}}dx$ et intégrant,

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}(hx)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(hx)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(hx)^7}{1.2.3} + \ldots\right].$$

Nous sommes donc en état de calculer la probabilité P qu'une erreur soit comprise entre $-x$ et $+x$, x étant une quantité donnée. Renversons le problème et demandons-nous entre quelles limites $-\eta$ et $+\eta$ une erreur doit être comprise pour que sa pro-

babilité P soit $\frac{1}{2}$. Nous aurons à calculer η par la condition

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[h\eta - \frac{\frac{1}{3}(h\eta)^3}{1} + \dots\right].$$

On en tire, par un tâtonnement rapide,

$$h\eta = 0,4769363,$$

et, comme

$$h\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a finalement

$$\eta = \varepsilon_1 \times 0,6744897.$$

Cette quantité η, telle qu'il y a à parier un contre un que l'erreur sera comprise entre $-\eta$ et $+\eta$, est ce que l'on appelle l'*erreur probable*; on vient de constater qu'elle est à très peu près les $\frac{2}{3}$ de l'erreur moyenne ε_1.

On voit également que les trois erreurs, moyenne quadratique, moyenne arithmétique et probable, sont proportionnelles à $\frac{1}{h}$.

Lorsqu'en étudiant un système de mesures, on trouve que l'erreur probable d'une mesure est de 0,1, par exemple, cela veut dire qu'il y a autant de chances que l'erreur d'une mesure, prise à part, soit entre $-0,1$ et $+0,1$ qu'en dehors de ces limites. En d'autres termes, dans une série de 100 erreurs effectivement constatées pour ce genre de mesures, il y en aura 50 plus petites et 50 plus grandes que 0,1. Si l'on se reporte aux courbes dont nous nous sommes servi plus haut, l'erreur probable η est l'abscisse dont l'ordonnée partage l'aire de la demi-courbe de probabilité en deux parties égales, tandis que l'erreur moyenne ε_1 n'est que l'abscisse du point d'inflexion. Ou bien encore, si l'on dresse la liste des erreurs d'une série par ordre de grandeur sans avoir égard aux signes, et qu'on plie la liste en deux, l'erreur probable sera dans ce pli, juste au milieu de la série. Or, nous verrons que cette erreur probable remplace à elle seule toute la série et permet au besoin de la reconstituer, en sorte que, donner l'erreur probable d'une suite de mesures, c'est donner le moyen à la fois le plus simple et le plus exact d'en apprécier la précision.

Table de probabilités.

C'est la Table des valeurs de l'intégrale définie que nous venons de réduire en série. Pour calculer aisément cette série, remplaçons hx par son équivalent $h\eta\frac{x}{\eta}$, ou par $0{,}4769\frac{x}{\eta}$; puis, prenant pour argument $\frac{x}{\eta}$ et lui donnant successivement pour valeurs 0; 0,1; 0,2; 0,3, ..., formons un tableau des valeurs que prend la série, c'est-à-dire

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[0{,}47\frac{x}{\eta} - \frac{1}{3}\left(0{,}47\frac{x}{\eta}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(0{,}47\frac{x}{y}\right)^5 - \dots\right].$$

Valeurs de $\frac{x}{\eta}$.	P.	Différence.	Valeurs de $\frac{x}{\eta}$.	P.	Différence.
0,0.....	0,000	54	2,5.....	0,908	13
0,1.....	0,054	53	2,6.....	0,921	10
0,2.....	0,107	53	2,7.....	0,931	10
0,3.....	0,160	53	2,8.....	0,941	9
0,4.....	0,213	51	2,9.....	0,950	7
0,5.....	0,264	50	3,0.....	0,957	6
0,6.....	0,314	49	3,1.....	0,963	6
0,7.....	0,363	48	3,2.....	0,969	5
0,8.....	0,411	45	3,3.....	0,974	4
0,9.....	0,456	44	3,4.....	0,978	4
1,0.....	0,500	42	3,5.....	0,982	3
1,1.....	0,542	40	3,6.....	0,985	2
1,2.....	0,582	37	3,7.....	0,987	3
1,3.....	0,619	36	3,8.....	0,990	1
1,4.....	0,655	33	3,9.....	0,991	2
1,5.....	0,688	31	4,0.....	0,993	1
1,6.....	0,719	29	4,1.....	0,994	1
1,7.....	0,748	27	4,2.....	0,995	1
1,8.....	0,775	25	4,3.....	0,996	1
1,9.....	0,800	23	4,4.....	0,997	1
2,0.....	0,823	20	4,5.....	0,998	0
2,1.....	0,843	19	4,6.....	0,998	0
2,2.....	0,862	17	4,7.....	0,998	1
2,3.....	0,879	16	4,8.....	0,999	0
2,4.....	0,895	13	4,9.....	0,999	0
2,5.....	0,908		5,0.....	0,999255	

Par exemple, pour $\frac{x}{\eta} = 0{,}1$, on aurait

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[0{,}04769 - \frac{1}{3}(0{,}04769)^3 + \ldots\right] = 0{,}05378,$$

et ainsi de suite.

Supposons, par exemple, que, dans la mesure des hauteurs au sextant, un observateur ait pour erreur probable $\eta = \pm 20''$. La probabilité de commettre une erreur positive ou négative, comprise en valeur absolue entre $30''$ et $40''$, s'obtiendra de la manière suivante. Pour $x = 30''$, $\frac{x}{\eta} = \frac{30}{20} = 1{,}5$. En face du nombre 1,5, la Table donne P = 0,688. Concluons-en que, sur 1000 observations, il y en aura 688 pour lesquelles l'erreur sera $30''$ ou au-dessous. Pour $x = 40''$, on aurait $\frac{x}{\eta} = 2$, P = 0,823, et par suite, il y aura 823 observations sur 1000 où l'erreur sera de $40''$ ou au-dessous. La différence

$$823 - 688 = 135$$

montre que, dans une série de 1000 observations, il ne devra s'en trouver que 135 entre les limites assignées, ou 13,5 sur 100.

On voit aussi, par la même Table, que la probabilité de rencontrer dans une pareille série une erreur égale ou inférieure à 3 fois l'erreur probable, c'est-à-dire à $1'$, sera 0,957. Il y aura donc, sur 1000 observations, 957 erreurs de cet ordre. Au-dessus, il n'y en aura que 4 sur 100, probablement pas une seule sur 10.

Cependant, si, sur 10 observations, il se présentait une erreur égale ou un peu supérieure à $1'$, il ne faudrait pas se croire autorisé à la rejeter pour cela, car la probabilité d'une telle erreur est faible ($\frac{43}{1000}$), mais non pas évanouissante. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

L'application la plus remarquable qu'on puisse faire de cette Table est de calculer, de très près, toute la série d'erreurs qu'un observateur peut commettre dans un ensemble de mesures dont la précision est assignée d'avance par la connaissance de l'erreur probable. C'est surtout dans les problèmes relatifs au tir que cette application des Tables de probabilités trouve son emploi. Soit le problème suivant : supposons, par exemple, qu'un tireur au

pistolet ait pour erreur moyenne $\varepsilon_1 = 18^{cm},3$, ou pour erreur probable $\eta = 12^{cm},33$ (c'est le cas du tireur cité par le général Didion). On demande, d'après cet unique renseignement, combien de ses coups sur 100 s'écarteront de 0^{cm} à 5^{cm} de la cible, combien de 5 à 10, de 10 à 20, etc., et combien d'écarts atteindront 56^{cm}. L'argument de la Table étant $\frac{x}{\eta}$, on calculera d'abord ces limites d'écarts en divisant par $\eta = 12,33$, ce qui donne :

Écarts ou valeurs de x.	Argument ou valeurs de $\frac{x}{\eta}$.
5	0,406
10	0,810
15	1,217
21	1,707
26	2,109
30	2,515
40	3,245
45	3,65
56	4,54

Avec ces valeurs de l'argument, on entre dans la Table et l'on interpole par simples parties proportionnelles pour avoir les valeurs de P. Celles-ci doivent être multipliées par le nombre de coups, qui est ici 100. On trouve ainsi :

Valeurs de x.	Valeurs de P × 100.
5	21,5
10	41,6
15	58,6
21	74,8
26	84,5
31	91,0
40	97,1
45	98,6
56	99,8

Chacun des nombres de la seconde colonne exprime le nombre de coups sur 100 dont les écarts seront compris entre 0 et 5, entre 0 et 10, entre 0 et 15, etc. En retranchant chaque nombre du suivant, on a finalement :

Limite des écarts.	Nombre théorique des coups.	Nombre réel.
De 0 cm à 5 cm	21,5	24
» 5 » 10	20,1	20
» 10 » 15	17,0	18
» 15 » 21	16,2	11
» 21 » 26	9,7	10
» 26 » 31	6,5	8
» 31 » 40	6,1	5
» 40 » 45	1,5	3
» 45 » 56	1,2	1
Au-dessus de 56 cm	0,2	0

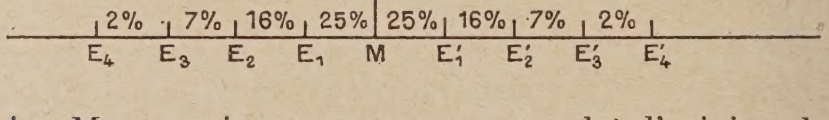
Ainsi, pour apprécier la précision d'une arme, il n'est pas nécessaire de recourir aux registres de tir et d'examiner la série des écarts constatés : il suffit de connaître l'erreur probable de l'arme placée dans les mains d'un tireur exercé, puisque cette erreur probable nous permet de reconstituer par le calcul, avec une exactitude bien suffisante, toute la série des écarts qui auront lieu sur un nombre donné de coups, non pas sans doute dans l'ordre où ces écarts se produiront effectivement, mais avec leur vraie grandeur. En appliquant aux observations astronomiques de Bradley, déjà citées, le même procédé on retrouverait encore plus exactement tout le Tableau des erreurs comprises entre 0^s et $0^s,1$, entre $0^s,1$ et $0^s,2$, etc.

Applications au tir de l'artillerie.

Tous les problèmes qui se présentent dans la préparation et le réglage du tir de l'artillerie se résolvent avec la plus grande facilité à l'aide de la Table de probabilité.

Il est commode, dans bien des cas, d'avoir une traduction graphique de cette Table. C'est l'*échelle de dispersion* que représente la figure ci-dessous.

Fig. 88.



Le point M, ou point moyen, correspond à l'origine des coordonnées de la courbe de probabilité; les intervalles ME_1, ME'_1,

$E_1 E_2$, $E'_1 E'_2$, ..., représentent chacun un *écart probable* et les différences prises dans la Table de probabilité donnent (en les arrondissant) le pourcentage des écarts compris dans chaque intervalle. L'échelle de dispersion ou la Table elle-même permettent de résoudre très simplement les problèmes qui se posent à l'artilleur et d'une façon générale qui se ramènent aux deux suivants :

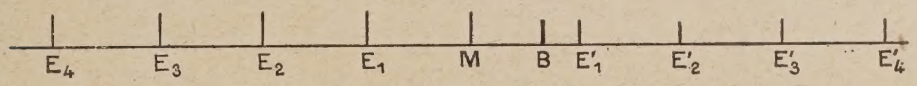
1° Placer le point moyen d'un tir à un endroit déterminé par rapport à l'objectif;

2° Connaissant les dimensions d'un objectif et en supposant le point moyen exactement placé, calculer la consommation de projectiles à prévoir pour obtenir un effet déterminé.

Premier problème. — *Déduire, de la proportion des coups observés en deçà et au delà du but, la position du point moyen d'un tir, par rapport à l'objectif.*

a. Supposons un tir de 120 coups donnant 80 coups courts et 40 coups longs, soit 33,33 pour 100 de coups longs et 66,66 pour 100

Fig. 89.



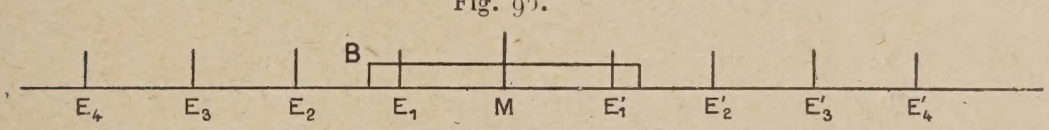
de coups courts et cherchons à situer le but sur l'échelle de dispersion. Le point M correspond à 50 pour 100 des coups; la position du point B se déduira de :

$$\frac{MB}{ME'_1} = \frac{16.66}{25} = \frac{2}{3}, \qquad BM = \frac{2}{3} \text{ d'écart probable.}$$

On résoudrait de même le problème directement par la Table.

b. On tire avec du canon de 75, à obus explosifs, à 4600^m

Fig. 90.



sur un objectif qui a 40^m de profondeur et dont on ne voit que la lisière antérieure. Quelle proportion de coups courts et de coups longs faut-il avoir pour que le point moyen soit au centre de l'objectif?

La lisière antérieure doit être à 20^m en deçà du point moyen.

Nous savons par les Tables de tir que l'écart probable η est de 16^m; on voit de suite sur l'échelle de dispersion que la lisière devra se trouver au point B tel que

$$MB = 20^m = 1,25\,\eta.$$

En outre, d'après les Tables : entre E_4 et E_2, il tombe 9 pour 100 de coups; entre E_2 et B, il tombera les $\frac{3}{4}$ de 16 pour 100, soit 12 pour 100 des coups; le nombre des coups observés courts devra être de 21 pour 100.

En employant la Table seule, on aurait raisonné de la façon suivante :

Le point moyen étant au milieu de l'objectif, seront longs par rapport à la lisière :

1° Tous les coups situés au delà du point moyen ($p = 0,50$);

2° Tous ceux qui, tombant en deçà du point moyen, seront compris dans une bande de 20^m de largeur qui, exprimée en écart probable (16^m), est égale à 1,25, soit $n = 1,25$.

La probabilité d'avoir un coup dans cette bande sera la moitié de la probabilité d'avoir un écart ne dépassant pas 1,25, c'est-à-dire

$$\frac{0,6008}{2} = 0,3004;$$

la probabilité d'avoir un coup long sera donc

$$p = 0,50 + 0,30 = 0,80;$$

ainsi, il faudra 80 pour 100 de coups longs et 20 pour 100 de coups courts.

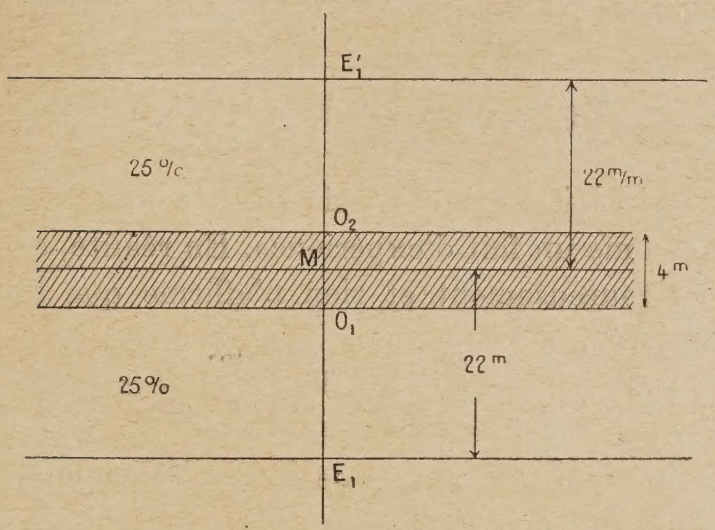
Deuxième problème. — *Quelle sera la consommation de munitions pour démolir, avec du canon de* 155 *court tirant à* 5900^m *à obus allongés, sur une longueur de* 100^m, *une tranchée sensiblement perpendiculaire à la direction du tir et de* 1^m *de large?*

L'expérience a montré que les coups tombant à $1^m,50$ en deçà ou au delà de la tranchée sont efficaces; il en résulte que seront

bons les coups tombant dans une bande de 4^m ayant son milieu au milieu même de la tranchée.

Dans les conditions du tir, l'écart probable est de 22^m; $MO_1 = MO_2$ est égal à $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$ de l'écart probable. MO_1 recevra donc 25 pour 100 $\times \frac{1}{11} = 2,27$ pour 100 des coups et OO_1 qui en est le double 4,55 pour 100. La consommation à prévoir

Fig. 91.



pour mettre un coup dans l'objectif sera de $\frac{100}{4,75} = 22$ coups. Or, on sait par l'expérience que, pour démolir une tranchée, il faut 1 obus de 155 allongé tous les $7^m,50$. Pour démolir une longueur L de tranchée, il faudra un nombre d'obus égal à $\frac{L}{7,50} \times 22$, et pour une tranchée de 100^m de longueur,

$$\frac{100}{7,5} \times 22 = 294 \text{ coups.}$$

En employant les Tables seules, on aurait

$$\frac{x}{\eta} = \frac{2}{22} = 0,09,$$

d'où, en interpolant dans la Table où l'on a, pour $\frac{x}{\eta} = 0,10$, $p = 0,0538$, et, pour $\frac{x}{\eta} = 0,05$, $p = 0,0269$, on trouve, pour $\frac{x}{\eta} = 0,09$, $p = 0,0485$.

Le nombre de coups utiles à la démolition sera donc de 4,85 pour 100 et la consommation à prévoir pour détruire 100^{m} de tranchée

$$\frac{100}{7,50} \times \frac{100}{4,85} = 274.$$

L'échelle de dispersion avait donné 294. La différence provient de ce que la Table est une échelle de dispersion dans laquelle les bandes sont plus serrées et qui donne par conséquent une solution plus précise.

Sur l'application de la loi de Gauss.

On admet la loi de Gauss, soit comme une vérité mathématique, soit comme un fait d'expérience. En réalité, elle n'a pas été démontrée rigoureusement et rien n'affirme que l'expérience la vérifiera toujours.

On peut prouver que la loi de Gauss est applicable chaque fois que l'erreur totale est la résultante d'erreurs partielles, accidentelles, très nombreuses, très petites et indépendantes.

Les probabilités de ces erreurs doivent être indépendantes et, pour chacune de ces erreurs partielles, la loi de probabilité peut être quelconque pourvu qu'elle soit symétrique.

Pour établir cette proposition, on s'appuie sur un lemme de M. d'Ocagne qui s'énonce ainsi :

« Si deux erreurs accidentelles x et y, indépendantes et obéissant à la loi de Gauss, s'ajoutent, l'erreur résultante $E = x + y$ suit aussi la loi de Gauss. »

En effet, la probabilité pour qu'une erreur x soit comprise entre x et $x + dx$ est, par hypothèse, $K\, e^{-h^2x^2}\, dx$ où $K = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$; de même, la probabilité de l'erreur y comprise entre y et $y + dy$ est

$$K' e^{-h'^2y^2}\, dy, \qquad \text{où} \qquad K' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}}.$$

Le théorème des probabilités composées, applicable puisque

les erreurs sont indépendantes, donne $KK' e^{-P} dx\, dy$, comme probabilité pour que x soit compris entre x et $x + dx$, en même temps que y entre y et $y + dy$, en posant $P = h^2 x^2 + h'^2 y^2$.

Cherchons la probabilité α pour que les deux erreurs x et y satisfassent à des inégalités à termes finis, c'est-à-dire, géométriquement, pour que le point (x, y) soit intérieur à un contour donné quelconque. Le problème des probabilités totales donne

$$\alpha = \iint KK' e^{-P} dx\, dy,$$

l'intégrale étant étendue à tout le contour.

z et t désignant deux variables indépendantes, posons

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{h'^2 z + t}{h^2 + h'^2}, \\ y = \dfrac{h^2 z - t}{h^2 + h'^2}. \end{cases}$$

Il viendra, en effectuant sur l'intégrale le changement de variable défini par les équations (1), dont le Jacobien est $\frac{1}{h^2 + h'^2}$,

$$\alpha = \iint \frac{KK'}{h^2 + h'^2} e^{-P} dz\, dt,$$

où

$$P = \frac{h^2 h'^2}{h^2 + h'^2} z^2 + \frac{t^2}{h^2 + h'^2}.$$

Si nous voulons, par exemple, que l'erreur résultante $x + y = z$ soit comprise entre z_0 et z_1 (*fig.* 92), il faudra étendre l'intégrale au contour ABCD, limité par deux droites parallèles $x + y = z_0$ et $x + y = z_1$:

$$\alpha = \int_{z_0}^{z_1} \frac{KK'}{h^2 + h'^2} e^{-h''^2 z^2} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{h^2 + h'^2}} dt,$$

où

$$h''^2 = \frac{h^2 h'^2}{h^2 + h'^2}.$$

Posons

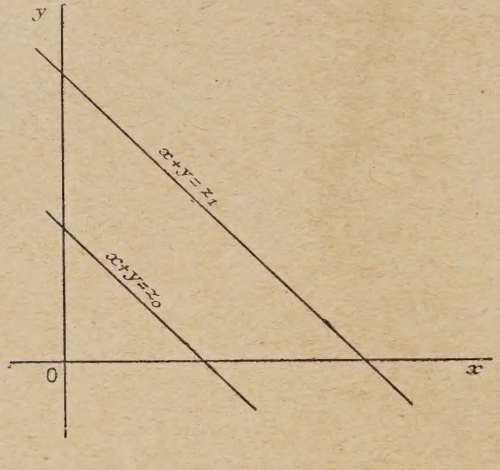
$$K'' = \frac{KK'}{h^2 + h'^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{h^2 + h'^2}} dt,$$

il viendra

$$\alpha = K'' \int_{z_0}^{z_1} e^{-h''^2 z^2};$$

donc la probabilité de l'erreur résultante $z = x + y$ suit la loi de Gauss, si celle-ci s'applique à chaque erreur composante.

Fig. 92.



La condition que $\alpha = 1$ pour $z_0 = -\infty$ et $z_1 = +\infty$ donne encore

$$K'' = \frac{h''}{\sqrt{\pi}}.$$

Ce lemme étant démontré, considérons un grand nombre d'erreurs, accidentelles, très petites et indépendantes.

Pour l'une d'elles, la probabilité est $e^{P}\,dx$, P étant une fonction paire de x, puisque la loi de probabilité est symétrique par hypothèse :

$$P = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \dots.$$

L'erreur restant petite, on peut prendre

$$P = \alpha_0 + \alpha_2 x^2,$$

en se limitant au carré de l'erreur. La probabilité sera alors

$$e^{-\alpha_0} e^{-\alpha_2 x^2}\,dx.$$

$e^{-\alpha_0}$ joue le rôle de K et α_2 celui de h^2. Donc, pour de telles erreurs qui resteront petites et, par suite, pour leur somme, la loi de Gauss peut être considérée comme vraie.

On a trouvé

$$h''^2 = \frac{h^2 h'^2}{h^2 + h'^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{h''^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2};$$

ainsi, *le carré de l'erreur probable résultante est la somme des*

carrés des erreurs probables composantes; on a deux énoncés analogues pour l'erreur moyenne résultante et l'erreur moyenne quadratique résultante.

Démonstration de la méthode des moindres carrés.

La loi de Gauss donne la probabilité pour que l'erreur, c'est-à-dire l'écart entre la valeur vraie supposée connue et la valeur que l'on trouvera par l'observation, soit comprise entre des limites données; elle donne la probabilité d'obtenir tel résultat déterminé.

Les conditions qui nous ont amené à la méthode des moindres carrés étaient au contraire inverses. Il s'agissait de remonter de l'effet, qui est la valeur observée, à la cause inconnue qui est la vraie valeur. On peut, en s'appuyant sur le théorème de la probabilité des causes, justifier la méthode des moindres carrés.

THÉORÈME DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES. — *Lorsqu'un événement* E *peut être attribué à diverses causes* C, C′, C″, ... *exclusives les unes des autres, ayant* a priori *des probabilités* $\varpi, \varpi', \varpi'', \ldots$, *si, en supposant l'événement dû à la cause* C, *sa probabilité est* p, — *de même* p', *s'il est dû à* C′, — *etc., les probabilités des causes* C, C′, C″, ... *sont proportionnelles à* $\varpi p, \varpi' p', \varpi'' p'', \ldots$.

Assimilons les causes à des urnes; les probabilités pour que l'on mette la main dans chaque urne sont respectivement $\varpi, \varpi', \varpi'', \ldots$. Chaque urne contient des boules blanches et des boules noires en nombres connus, et les probabilités d'amener une blanche est, pour chacune d'elles, $p, p', p'', \ldots$.

On met la main au hasard dans l'une des urnes, et l'on tire une boule; elle est blanche. C'est l'événement E; quelle est la probabilité pour que la boule blanche provienne de l'urne C?

La probabilité pour que, de l'ensemble des urnes, sorte une boule blanche est

$$\varpi p + \varpi_1 p_1 + \varpi_2 p_2 + \ldots$$

Soit x la probabilité pour que, cette boule blanche étant sortie, elle provienne de l'urne C. La probabilité *a priori* pour qu'il sorte une boule blanche de l'urne C est

$$(\varpi p + \varpi' p' + \varpi'' p'' + \ldots)x.$$

D'autre part, cette probabilité est aussi ϖp, puisque, pour tirer une boule blanche de C, il faut d'abord mettre la main dans cette urne, puis tirer une boule blanche. Donc

$$x = \frac{\varpi p}{\varpi p + \varpi' p' + \varpi'' p'' + \dots},$$

ce qui démontre le théorème.

Ceci posé, soit donc un système de m équations entre des inconnues et les mesures qui doivent servir à les déterminer. Supposons qu'un système quelconque de valeurs assignées à ces inconnues produise, dans les équations de condition, les résidus ε, ε', ε'', ... Les probabilités de ces erreurs prises chacune à part seront

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon'^2} d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon''^2} d\varepsilon, \quad \dots,$$

et la probabilité de leur apparition simultanée sera, d'après le théorème de Moivre, le produit de leurs probabilités respectives, c'est-à-dire

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} d\varepsilon\right)^m e^{-h^2(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\dots)}.$$

Appliquons le théorème des probabilités des causes. Parmi tous les systèmes de valeurs des inconnues, causes des erreurs E, E′, E″, ..., le plus probable sera celui qui répond à l'événement de probabilité maximum, c'est-à-dire à la plus petite valeur de la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \dots$.

Le système de valeurs des inconnues de probabilité maximum sera donc celui qui rendra minimum la somme des carrés des résidus. C'est justement la condition à laquelle satisfait la méthode de Legendre.

Objections qu'on fait communément à la méthode des moindres carrés.

Le Calcul des probabilités est d'origine française, ainsi que la méthode que nous venons d'exposer; cependant, leur emploi pour la discussion des observations a été longtemps délaissé dans notre pays; nous avons dû adopter ici les notations et les

règles de Gauss, qui sont universellement appliquées hors de France à toutes les sciences de mesures et d'expériences. Le discrédit, qui a longtemps frappé chez nous la méthode de Legendre, complétée par Gauss, tient à deux préjugés auxquels nous allons tâcher de répondre. Le premier résulte de l'opinion que la méthode des moindres carrés ne s'applique légitimement qu'à un grand nombre d'observations. Le second s'appuie sur ce fait que, parfois, des éléments importants, obtenus par cette méthode avec une erreur probable très faible, ont été trouvés ultérieurement en défaut de quantités bien supérieures à ladite erreur probable.

Sur le premier point, personne n'a défini ce que l'on doit entendre par ce *grand nombre* d'observations qui seul justifierait l'emploi de la méthode de Legendre. Est-ce mille, cent mille, un million? En second lieu, ceux qui font l'objection n'hésiteraient pas un seul instant à appliquer à une douzaine d'observations ou même au plus petit nombre possible, c'est-à-dire à deux, la règle de la moyenne arithmétique, qui n'est pourtant qu'une forme particulière de la méthode générale. La question n'est pas dans le *grand nombre*, mais dans le *nombre suffisant* dont voici la définition : un ensemble de mesures ou d'équations de condition comporte légitimement l'application des méthodes précédentes lorsque les résidus manifestent nettement la loi de probabilité des erreurs fortuites. Dans le cas contraire, cet ensemble ne peut conduire à aucune conclusion sérieuse; on n'est même pas en droit de lui appliquer la règle de la moyenne arithmétique. Nous allons citer un exemple où, avec 9 mesures, les méthodes peuvent être appliquées, et un autre où, avec 19, on ne peut pas même prendre une simple moyenne.

Dans le calcul relatif aux mesures du pendule en différents lieux de la Terre, nous trouvons, pour l'erreur probable d'une mesure isolée, $+0^{mm},045$. Calculons d'après cela, au moyen de la Table des valeurs de l'intégrale définie, combien d'erreurs doivent tomber entre 0 et 0,05, entre 0,05 et 0,10, ... Nous aurons :

Entre 0,00 et 0,05.....	5	erreurs;	on en trouve	6
» 0,05 » 0,10.....	3	»	»	2
» 0,10 » 0,15.....	1	»	»	1
Au-dessus de 0,15.....	0,2	»	»	0

L'accord est suffisant, l'application de la méthode des moindres carrés est légitime, les erreurs probables trouvées pour les valeurs attribuées aux inconnues donnent une idée exacte de leur précision.

S'il en était autrement, c'est-à-dire si la répartition des écarts différait très notablement des règles de probabilité, il faudrait en conclure que les observations, mesures ou expériences, sont viciées plus ou moins par quelque erreur systématique. En voici un exemple. Par une série de 19 expériences faites avec soin, on a déterminé l'équivalent de l'hydrogène en prenant 100 pour celui de l'oxygène. Il s'agissait de savoir si cet équivalent doublé est entier ou fractionnaire. Voici les résultats :

	Écarts.		Écarts.
12,546	+ 32	12,522	— 8
12,480	— 34	12,551	— 37
12,547	+ 33	12,490	+ 24
12,491	— 23	12,490	+ 24
12,480	+ 34	12,533	— 19
12,496	+ 18	12,551	— 37
12,550	— 36	12,562	— 48
12,550	— 36	12,476	— 42
12,508	+ 6	12,480	+ 34
12,489	+ 25		
Moyenne		12,514	

D'après ce résultat, il ne saurait être question ici d'un nombre entier. Mais, en l'examinant de plus près, on trouve qu'à en juger par les écarts l'erreur probable d'une mesure isolée serait + 0,0209 ; par suite, sur 19 écarts, nous en devrions trouver :

4,8	entre	0,000	et	0,010 ; il y en a	2
4,3	»	0,010	»	0,020 »	2
3,5	»	0,020	»	0,030 »	4
2,7	»	0,040	»	0,040 »	9
1,6	»	0,040	»	0,050 »	2
2,1	au delà de	0,050		»	0

Ces écarts ne suivant nullement la loi de probabilité des erreurs accidentelles, il faut en conclure, ou que le nombre des expériences est beaucoup trop petit et rend illusoire l'évaluation de l'erreur probable, ou qu'elles sont entachées de quelque erreur

systématique. Dans l'un et l'autre cas, la moyenne ne donne pas le résultat le plus probable et la question qu'il s'agissait de décider par ces expériences reste en suspens.

Passons à la seconde objection. De la discussion des passages de Vénus sur le Soleil observés en 1761 et 1769, M. Encke a déduit :

$$\text{Parallaxe du Soleil} = 8'',57116 \pm 0'',0370.$$

D'après cette petite erreur probable, il y aurait 1 contre 1 à parier que la vraie parallaxe est comprise entre

$$8'',53 \text{ et } 8'',61.$$

Or, nous savons aujourd'hui que la parallaxe $8'',80$ tombe bien en dehors de ces limites. L'erreur $0'',22884$ est égale à 6,1850 fois l'erreur probable $0'',037$. La Table précédente ne va pas jusqu'à cette valeur de l'argument $\frac{x}{\eta}$, mais il est aisé de faire le calcul par la série donnée plus haut. On trouve alors pour la probabilité d'une telle erreur environ 0,00001 [1]. Ainsi, à s'en tenir à l'erreur probable assignée par M. Encke à son résultat, il y aurait cent mille à parier contre un qu'il n'est pas en erreur de $0'',22884$, et pourtant telle est la correction que nous sommes obligés de lui faire subir.

De même, Newton avait déduit, des mesures exécutées par Pound sur les satellites de Jupiter, la masse de cette planète $= \frac{1}{1067}$. Plus tard, Bouvard la détermina par une toute autre voie, en construisant les Tables de Jupiter et de Saturne sur la théorie de Laplace. Il trouva $\frac{1}{1070}$. L'accord était remarquable. Laplace, appliquant ici le Calcul des probabilités, trouva qu'il y avait un million à parier contre un que la valeur $\frac{1}{1070}$ n'était pas en erreur de $\frac{1}{100}$. Or, peu d'années après, les astronomes étaient obligés de l'augmenter du double de cette dernière quantité et de porter cette masse à $\frac{1}{1050}$.

---

(1) Cette série est trop lentement convergente pour des valeurs un peu fortes de $h\,x$. Laplace a donné pour ce cas l'intégrale définie sous la forme

Certes, il y a eu déception pour les astronomes dans ces deux cas, mais il n'y a pas lieu d'en accuser l'emploi de la méthode des moindres carrés ou du calcul des chances. Nous ne saurions trop répéter que cet emploi n'est légitime que dans le cas où les observations ont été purgées de toute erreur systématique sensible. Or, on a reconnu que Pound avait négligé certaines corrections instrumentales ; que Bouvard, dans ses immenses calculs, n'avait pas tenu un compte absolument exact de toutes les inégalités du mouvement de Saturne ; enfin que les observations des passages de Vénus sur le Soleil sont entachées d'erreurs systématiques fort singulières que nous aurons lieu de discuter plus tard. L'introduction de la méthode des moindres carrés dans les calculs a rendu aux astronomes l'immense service de fixer énergiquement leur attention sur la recherche et l'élimination préalable de ces erreurs dangereuses.

---

d'une fraction continue fort aisée à calculer :

$$1 - \frac{e^{-h^2x^2}}{hx\sqrt{\pi}} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{2\alpha}{1+\cfrac{3\alpha}{1+\ddots}}}},$$

dans laquelle $\alpha = \frac{1}{2h^2x^2}$. Appliquons-la au cas actuel. Les réduites successives sont $\frac{1}{1+\alpha}, \frac{1+2\alpha}{1+3\alpha}, \frac{1+5\alpha}{1+6\alpha+3\alpha^2}, \frac{1+9\alpha+8\alpha^2}{1+10\alpha+15\alpha^2}, \ldots$.

En posant $hx = 0{,}47694 \times 6{,}185$, on trouve, pour la dernière réduite :

$\log hx$	0,46981	$\log\log e$	9,63778	$\log \frac{e^{-h^2x^2}}{hx\sqrt{\pi}}$ ·	5,30242
$\log h^2x^2$	0,93962	$\log h^2x^2$	0,93962		
$\log 2$	0,30103		0,57740	$\log 4^e$ réd..	9,97907
$\log \alpha$	8,75935	Nombre			5,28149
$\log \alpha^2$	7,51870	$= \log e^{-h^2x^2}$..	3,77920	Nombre...	0,0000019
4e réduite.		$\log hx$	0,46981	1 — nomb .	0,9999981
log num	0,18156	$\log \sqrt{\pi}$	0,24857		
log dén	0,20249		4,69758		
$\log 4^e$ réd....	9,97907	C^t log.....	5,30242		

La valeur de l'intégrale définie pour $\frac{x}{\eta} = 6{,}347$ est donc 0,9999981 ; on voit combien le reste de l'aire de la courbe, c'est-à-dire 0,0000019, depuis l'abscisse 6,185 jusqu'à l'infini, est déjà petit.

Conclusion.

Le Calcul des probabilités, appliqué à la théorie des mesures ou des observations, a l'avantage de confirmer ce que le bon sens nous avait appris déjà sur la meilleure manière de combiner les observations; mais il ne nous donne aucun moyen de les corriger ou de choisir entre elles les bonnes pour rejeter les mauvaises. La Table précédente nous apprend bien que la probabilité d'une erreur, égale ou supérieure à 3 fois l'erreur probable r, est $1 - 0{,}957 = 0{,}043$, qu'elle n'est que 0,007 pour une erreur égale ou supérieure à $4r$, en sorte que la première ne doit se présenter que 43 fois et la seconde 7 fois sur 1000 observations, mais elle ne nous apprend pas dans quelle partie d'une série de mesures cette erreur de grandeur exceptionnelle devra se trouver.

Il arrive souvent, à la mer, que les observations de hauteur, par exemple, deviennent fort difficiles quand la mer est très agitée ou l'horizon brumeux. Alors, dans une série d'une dizaine d'observations, on en rencontre de très discordantes et l'on éprouve une forte tentation de les laisser de côté, parce qu'elles gâteraient, dit-on, la moyenne. On a proposé pour cela un criterium qui consiste à exclure, sur n observations, celles dont la probabilité, estimée par leurs écarts avec la moyenne, tomberait à $\frac{1}{n}$ et au-dessous. Par exemple, ayant réuni 20 observations d'un phénomène et obtenu, en les comparant une à une à la moyenne, une évaluation de l'erreur probable r, on rejetterait toutes celles dont la probabilité serait de $\frac{1}{200}$ seulement, ou de 0,05. La Table précédente montre que ce sont celles dont les écarts atteignent ou dépassent le triple de l'erreur probable. Alors on referait la moyenne des observations conservées en obtenant ainsi un accord plus encourageant. Mais c'est là un pur enfantillage. Si la moyenne des observations non triées est déjà assez précise pour faire apprécier l'erreur probable des observations, pourquoi y toucher? Ensuite n'est-ce pas par une vue tout à fait arbitraire du sujet qu'on préfère la fraction $\frac{1}{n}$ à d'autres fractions, telles que $\frac{2}{n}$ ou $\frac{1}{2n}$? Une règle bien plus prudente est celle que suivent les astronomes;

elle consiste à ne jamais attendre le résultat d'un calcul pour trier leurs observations. Ils ne rejettent que celles qui sont marquées douteuses (deux points :) ou très douteuses (quatre ::) par l'observateur lui-même, au moment même de l'observation.

Si nous avons insisté longuement sur la méthode des moindres carrés, c'est qu'il est bon de la connaître et de savoir l'appliquer au besoin. C'est un moyen puissant de discussion dont les hommes de science tirent parti lorsqu'ils veulent savoir jusqu'à quel point leurs théories, leurs formules s'adaptent à la réalité, ou bien lorsqu'ils veulent obtenir, avec toute la précision possible, des constantes fondamentales dans la Science. Par exemple, lorsqu'on a réuni les mesures géodésiques d'arcs de méridien effectuées à grands frais, sur tous les continents, afin d'étudier la vraie figure du globe, c'est par la méthode des moindres carrés qu'on devra traiter les équations de condition, dût le calcul durer des mois entiers et exiger tout un personnel de calculateurs.

LIVRE QUATRIÈME.

NAVIGATION.

La Science de la navigation est très complexe; nous n'en traitons ici que la partie qui a pour objet de déterminer, en mer, la position du navire et l'azimut de la route qu'il doit suivre pour arriver à un point donné. Ce beau problème a deux solutions également indispensables : l'*estime* et les *observations astronomiques*.

Connaissant la position du navire à un instant donné, pour avoir cette position à un instant ultérieur, il faut connaître les éléments de sa trajectoire, c'est-à-dire sa vitesse, en grandeur, direction et sens.

L'*estime* a pour but de mesurer directement et à tout instant la vitesse et l'orientation de la route. Elle a pour instruments le loch, la boussole et les cartes marines. A la rigueur, on fait route avec l'estime seule, et c'est même là la seule ressource du navigateur lorsque le ciel est masqué par des nuages. Les *observations astronomiques* ont pour but d'obtenir à certains moments la position du navire avec une précision supérieure, et de rectifier ainsi l'accumulation dangereuse des erreurs inhérentes à l'autre procédé; elles donnent à la navigation la sécurité et la célérité aujourd'hui si nécessaires. C'est la plus belle application qui ait jamais été faite des sciences aux grands intérêts des nations.

CHAPITRE XII.

NAVIGATION PAR ESTIME.

Mesure de la vitesse. — Loch et ampoulette.

La vitesse du navire se mesure au moyen du *loch*.

Le *bateau de loch* est une planche de bois en forme de secteur circulaire, lestée en bas par une bordure de plomb, de manière à se tenir verticalement dans l'eau. Une corde d'environ 300^{m} est attachée en *a* à cette planche et s'enroule par l'autre bout sur un tour portatif. Quand on veut mesurer la vitesse du navire (au

Fig. 93.

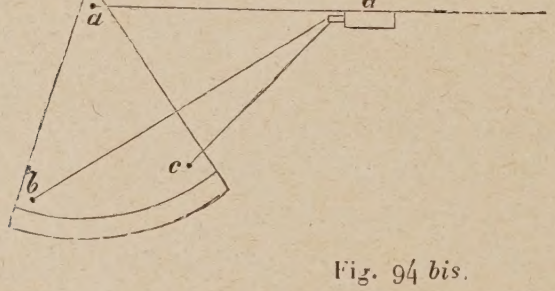
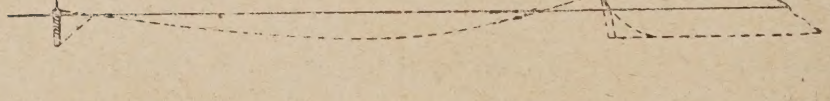


Fig. 94

Fig. 94 *bis*.



moins une fois par heure), on jette le loch à la mer; on attend qu'il soit assez éloigné pour être à l'abri des remous de l'arrière; alors le timonier chargé de l'opération prend en main la corde, laquelle porte des nœuds espacés de $15^{m},43$, et compte, pendant un laps de temps de 30^{s}, les nœuds qui filent entre ses doigts. Comme 30^{s} est la cent-vingtième partie d'une heure, comme $15^{m},43$ est la cent-vingtième partie du mille marin, le nombre des nœuds donne celui des milles que le navire parcourt en une heure.

Pendant cette opération, il faut que le bateau de loch oppose la plus grande résistance possible à la traction; par conséquent, la planche doit se tenir perpendiculairement à la corde. Dans ce but, on attache la ligne de loch non seulement au sommet *a*, mais encore à deux points *b* et *c* de la base, au moyen de deux bouts de corde réunis par une cheville qui entre à frottement dur dans un petit cylindre de bois *d*. Au contraire, quand on hale à bord le bateau de loch, celui-ci doit opposer le moins possible de résistance; c'est ce qu'on obtient en imprimant à la corde de loch une forte secousse qui dégage la cheville *d* et la fait tomber avec les deux cordelettes *bd* et *cd*. Alors le secteur est tiré par le sommet seulement et se couche sur l'eau.

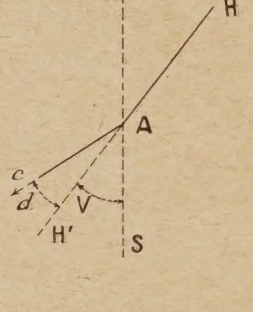
Pour compter les 30 secondes réglementaires, on se sert tout simplement d'un sablier qui a cette durée. Il est évident qu'une montre à secondes vaudrait beaucoup mieux. Une seconde d'erreur dans cet antique système est très admissible. C'est déjà, de ce chef, une incertitude de $\frac{1}{30}$ sur le résultat. Des expériences comparatives entre l'espace mesuré au loch, près d'un rivage, et l'espace déterminé sur le rivage par des relèvements exacts, ont engagé les navigateurs à réduire de $15^{m},43$ à $14^{m},8$ l'espacement réglementaire des nœuds. Il y a donc encore là quelque erreur de $\frac{0,6}{14,8} = \frac{1}{25}$ environ. Enfin le timonier exerce sans doute sur la corde du loch, ans le vouloir, une certaine traction qui raccourcit la mesure, andis que la courbure de la corde elle-même (plus dense que l'eau de mer quand elle est imbibée) doit s'allonger un peu. D'après cela, ce moyen un peu primitif de mesurer la vitesse, capable de donner de bons résultats quand on l'applique avec soin, comporte trop souvent des erreurs d'environ $\frac{1}{20}$, surtout pendant la nuit et par les gros temps.

A raison de dix nœuds, c'est-à-dire de dix milles par heure, un navire parcourt en 24 heures 240′, ce qui donne 12′ d'erreur par jour et 1° d'erreur pour l'estime au bout de cinq à six jours de mauvais temps. Aussi a-t-on cherché à susbtituer au loch d'autres appareils nommés *sillomètres*. Ce sont des moulinets à ailettes de diverses formes qui sont plongés dans l'eau, à l'arrière, et prennent une rotation dont les tours s'enregistrent d'eux-mêmes par un

système d'aiguilles et de cadrans, dans la chambre même du capitaine. On n'a qu'à déterminer par expérience la vitesse qui répond au nombre de tours enregistrés dans un temps donné. Mais ces instruments sont coûteux, et l'on en perd assez fréquemment, aussi a-t-on dans bien des cas conservé l'ancien procédé qu'il serait bien facile d'améliorer.

Faye a fait, en outre, les remarques suivantes. On n'a pas suffisamment remarqué que le loch ne donne pas seulement la vitesse : il indique aussi la direction de la marche du navire, direction qui ne coïncide pas toujours avec celle de l'axe de celui-ci. Lorsqu'on marche à la voile, combinée ou non avec la vapeur, l'action du vent sur la voilure se décompose en deux parties : l'une, parallèle à l'axe du navire, qui produit un mouvement de progression en ce sens; l'autre, perpendiculaire à cet axe, qui déplace peu à peu le navire parallèlement à lui-même. La route suivie est la résultante de ces deux déplacements; elle fait avec l'axe du navire un certain angle *d*, et se dessine sur la mer par un large sillon que l'œil suit à une assez grande distance. La boussole ne donnant que la direction de l'axe, il faut mesurer la dérive et

Fig. 95.



ajouter ce petit angle à l'azimut du navire pour avoir la route réelle. Pour cela, on fixe à l'arrière un petit cercle en cuivre avec une alidade. Le diamètre zéro coïncide avec l'axe du navire, tandis que l'alidade mobile est dirigée par l'observateur sur le milieu de la houache, c'est-à-dire du sillon dont nous venons de parler. Soient AS (*fig.* 95) la direction du méridien, A *c* celle de l'axe du navire, AH′ le prolongement de la houache AH. *c* AH′ sera la dérive *d*, SAH′ l'angle de route V, SA *c* l'azimut de l'axe

ou A. On aura, si AH est à tribord comme dans la figure, $V = A - d$, et à bâbord $V = A + d$.

Évidemment l'angle de route est donné immédiatement par la ligne de loch, lorsque celle-ci est fixée au navire et que le loch est à la remorque. Il suffit pour cela de faire une modification très simple à son gréement. Supposons qu'on ait noué à la corde de loch un des deux brins *b* ou *c* (*fig.* 93) et que la chevillette soit exclusivement fixée à l'autre. Lorsque, après avoir mesuré la vitesse à la manière ordinaire, on imprime une secousse à la corde pour dégager la cheville, le loch, traîné par la tranche, continuera à se tenir debout et se placera dans la direction de la moindre résistance, c'est-à-dire dans le sens de la marche. On le maintiendra ainsi à une distance de 300^m et l'on relèvera sa direction, soit au compas, soit au sextant, ce qui vaut mieux, en rendant visible son sommet au moyen d'une tige légère portant une carte blanche, comme un jalon. Si l'on emploie le sextant, on mesurera la distance angulaire du sommet du loch à un astre connu. On obtiendra ainsi l'angle de route, dérive y comprise. Rien n'empêcherait d'opérer la nuit; on rendrait visible le haut du loch en y attachant une très petite lanterne, sauf à le mettre avec précaution à la mer au lieu de l'y jeter.

Le même procédé fournirait, à la surface de la mer, une direction connue qui remplacerait assez bien la ligne d'horizon si souvent masquée par les brumes. La hauteur du signal placé au sommet du loch au-dessus de la mer étant *h*, et H celle de l'œil de l'observateur, l'inclinaison de cette ligne aura pour tangente $\frac{H - h}{300}$; elle sera donc sensiblement de $3438' \frac{H - h}{300}$. Sans doute, l'agitation de la mer fait varier à la fois H et *h*, mais, en temps calme, l'oscillation de la houle ne dépasse guère 1^m, et ne produit qu'une variation de $11'$ dans la direction de cette ligne de visée. Cet effet sera même considérablement réduit si l'on s'attache à observer la position moyenne du point de mire éloigné.

Boussole.

S'il n'y a pas de fer à bord, la boussole obéit à la seule action directrice du globe. L'aiguille aimantée est placée dans une boîte

cylindrique lestée, suspendue à la Cardan et fixée à l'arrière sous l'œil du timonier. Au moyen d'une chape en pierre dure, elle repose sur un pivot très aigu autour duquel elle tourne librement. Elle-même porte deux pièces : d'abord un disque mince en mica sur lequel est tracée la *rose des vents ;* ensuite un petit contrepoids destiné à la faire tenir horizontalement. C'est un système semblable à la boussole de l'arpenteur; seulement c'est ici l'aiguille et non la boîte qui porte le limbe divisé, et l'alidade est remplacée par une ligne de foi tracée très visiblement sur les parois de la boîte, dans la direction de l'axe du navire. Comme cette boîte et la ligne de foi font corps avec le navire, tandis que l'aiguille et son cercle divisé sont entièrement libres, si le navire vient à tourner horizontalement d'un certain angle, la ligne de foi tournera de cet angle, tandis que l'aiguille et la rose des vents resteront immobiles dans la direction que leur assigne la force directrice du globe. La ligne de foi viendra se placer devant une certaine division de la rose des vents et fera connaître ainsi l'azimut du navire, compté à partir du méridien magnétique, si l'aiguille se tient réellement dans ce plan-là.

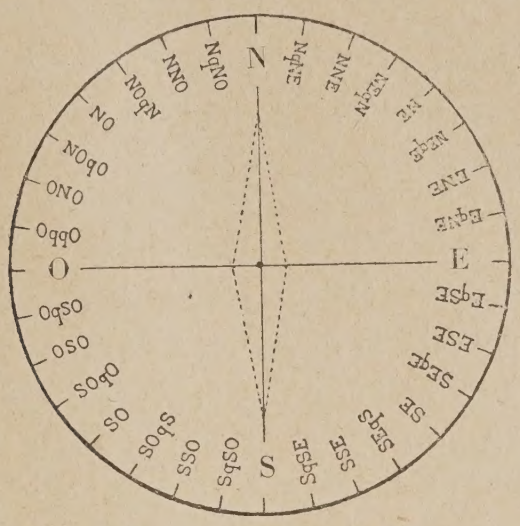
Conformément à une vieille tradition, sur la boussole, les azimuts se comptent encore, surtout dans la marine marchande, en deux sens opposés à partir de quatre divisions cardinales S, O, N, E. Les azimuts sont désignés, non par des nombres, mais par des noms propres, tels que nord-nord-est, nord-quart-nord-ouest, etc. Cet antique système était bon autrefois, lorsqu'on ne tenait compte que de quatre directions; il s'est appliqué sans trop d'efforts à huit, mais il est devenu intolérable lorsqu'on a été obligé de recourir à seize et surtout à trente-deux directions. Les trente-deux divisions actuelles de la circonférence portent le nom de *rumbs* et valent $11^{\circ}\ 15'$. Le rumb à son tour se subdivise en huitièmes, valant $1^{\circ}\ 24'\ 22''$.

Voici la figure actuelle de la rose des vents (*fig.* 96).

On intercale ces huitièmes, par exemple entre SOq S et SO, en disant : SOq $S\frac{1}{8}$, SOq $S\frac{1}{4}$, SOq $S\frac{3}{8}$, la numération procédant alors du sud, soit vers l'ouest, soit vers l'est. Dans la région opposée, elle procédera du nord pour les huitièmes de quart. Lorsqu'on fait un calcul d'azimut astronomique par nos formules, cet angle est obtenu en degrés comptés dans un sens unique (de gauche à droite),

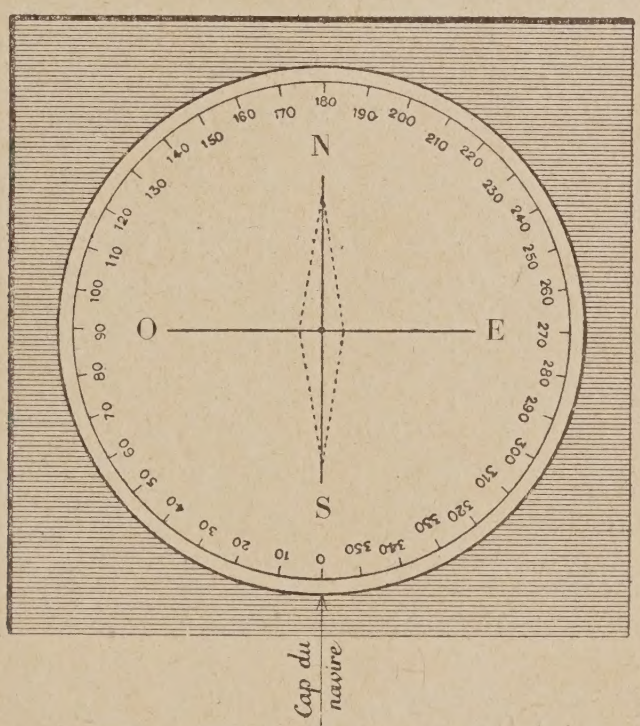
à partir d'une origine unique (le sud). Grâce à ces simples conventions, il n'y a jamais d'embarras, d'ambiguïté ni de trouble pour le

Fig. 96.



calculateur. Mais, lorsqu'on donne cet angle de route au timonier chargé de maintenir le cap du navire dans la direction corres-

Fig. 97.



pondante, il faut opérer une véritable conversion, à l'aide d'une table spéciale, pour traduire cet angle dans le langage du timonier.

Supposons que l'azimut astronomique calculé soit de 302°, tel que le donnerait une rose des vents graduée comme tous les instruments divisés (*fig.* 97). Il y a à faire la conversion dont voici le calcul :

	360°
Azimut	302
Angle compté du sud vers l'est	58
Sud-est	45
	13
q Est	11.15′
A peu près $\frac{1}{8}$	1.45

ce qui donne au compas la direction SEqE $\frac{1}{8}$.

Aujourd'hui, dans la marine à vapeur, on compte plutôt par quadrant, du Nord ou du Sud, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest, de 0° à 90°. Ainsi l'exemple précédent se traduirait par l'indication *Sud* 58° *Est*.

L'aiguille aimantée dévie ordinairement du méridien astronomique d'un angle δ qu'on nomme la *déclinaison*. En outre, l'influence des fers du navire produit une autre *déviation* D, non plus générale comme la première, mais toute spéciale à la direction actuelle du navire. Ces deux angles étant pris positivement dans le sens où croissent les azimuts, on aura, entre l'azimut astronomique A et l'azimut apparent M qu'on lit sur la boussole, la relation

$$A = M + D + \delta.$$

Les marins ont des cartes sur lesquelles sont tracées les lignes d'égale déclinaison. Ils ont des procédés particuliers pour déterminer la déviation D relative à un cap donné M. A ces conditions, les indications du compas serviront à maintenir le cap du navire dans l'angle de route voulu. Nous verrons, en outre, que les observations astronomiques permettent de déterminer fréquemment cette correction totale $D + \delta$, qu'on nomme la *variation*.

Loxodromie et problème de route.

La manière la plus simple pour conduire un navire d'un point A à un point B est de le diriger au moyen de la boussole de manière que sa route coupe tous les méridiens successifs sous un angle constant. S'il n'y avait aucune cause de dérive au cours du trajet,

il suffirait évidemment de déterminer cet angle au départ et de naviguer suivant le cap ainsi obtenu.

La courbe tracée sur la sphère et coupant tous les méridiens sous un angle constant porte le nom de *loxodromie.*

Le système de projection suivant lequel sont établies les cartes marines permet d'obtenir immédiatement cet angle.

Nous donnerons, dans la partie du volume consacrée à la géographie mathématique, la théorie du développement de Mercator, qui est celui des cartes marines. Disons seulement que, l'équateur étant développé en ligne droite, les méridiens sont représentés par des perpendiculaires à cette ligne et les parallèles par des droites parallèles à l'équateur espacées entre elles par la condition que les angles soient conservés.

La *navigation par estime* consiste donc à maintenir, à l'aide du gouvernail et de la boussole placée sous les yeux du timonier, le navire dans un azimut donné, en sorte que sa route coupe sous cet angle-là tous les méridiens qu'il traverse successivement; il faut en outre mesurer d'heure en heure sa vitesse à l'aide du loch.

Les problèmes de route sont : 1° déterminer l'angle de route qu'il faut suivre pour aller de A en B, les coordonnées de ces points étant connues; 2° connaissant la longueur loxodromique s parcourue à partir du point A sous l'angle V, déterminer les coordonnées λ', L′ du point d'arrivée.

On les résout par le calcul de la façon suivante.

Toute courbe tracée sur la sphère passant par le point λ, L, et coupant le méridien de ce point sous un angle V, a pour équations différentielles

$$ds \cos V = d\lambda, \tag{1}$$

$$ds \sin V = -dL \sin\lambda, \tag{2}$$

l'angle V étant compté, comme les azimuts, de la partie sud du méridien vers l'ouest, et les longitudes vers l'est.

Lorsqu'il s'agit d'une loxodromie, l'angle V est constant pour toute la courbe; dès lors, on a, en intégrant l'équation (1) de λ à λ',

$$s \cos V = \lambda' - \lambda. \tag{3}$$

Entre (1) et (2), éliminons ds, ce qui donne

$$dL = -\operatorname{tang} V \frac{d\lambda}{\sin\lambda}, \tag{4}$$

d'où, en intégrant [1],

$$(5) \qquad L' - L = -\operatorname{tang} V \left(\mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda' - \mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda \right).$$

Pour exprimer en minutes de cercle le deuxième membre et se servir de logarithmes ordinaires, il faut le multiplier par

$$\frac{3438}{\log e} = 7915',7,$$

facteur dont le logarithme est 3,89849.

On nomme chemin en colatitude la quantité $\lambda' - \lambda = s \cos V$, et chemin en longitude la quantité

$$L' - L = -\operatorname{tang} V \left(\mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda' - \mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda \right).$$

Voici, comme exemple, le calcul de s et V pour la route de Brest à New-York :

Coordonnées de Brest.		Coordonnées de New-York.	
$\lambda = 40° 37'$		$\lambda' = 49° 7'$	
$L = 353° 10'$		$L' = 283° 4'$	
$\lambda' - \lambda = 8° 40' = 520'$,		$L' = -69° 30' = -4170'$.	
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\lambda' \ldots$	9,66171	log diff.....	8,96951
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\lambda \ldots$	9,56849	log const.....	3,89849
Diff.....	0,09322		2,86800
		$\log(L' - L) \ldots$	3,62014
		$\log \operatorname{tang} V$.....	0,75214

La différence $\lambda' - \lambda$ ayant le signe +, il en est de même de cos V.

---

[1] Quand s est le chemin parcouru pendant quelques heures ou même une journée, on peut intégrer plus simplement cette équation en calculant $\sin \lambda$ pour la région intermédiaire, c'est-à-dire entre les limites λ et λ', et en considérant $\sin \frac{\lambda' + \lambda}{2}$ comme constant. Il vient alors

$$(L' - L) \sin \frac{\lambda' + \lambda}{2} = -s \sin V.$$

C'est la formule dont se servent les marins pour calculer le chemin de chaque jour en longitude.

Par conséquent :

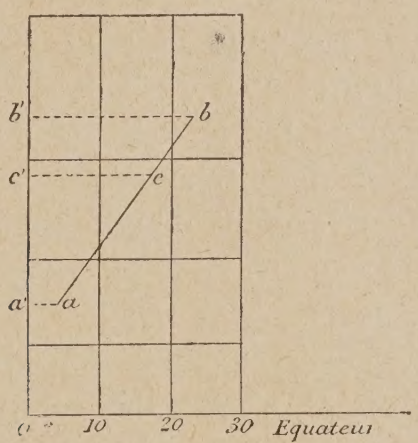
V.....	79° 58′
log cos V	9,24110
log($\lambda' - \lambda$).....	2,71600
log s.....	3,47490
s.....	2985′

Ainsi, pour aller de Brest à New-York, il faut suivre l'azimut loxodromique de 80°. On donnera donc l'ordre au timonier de mettre le cap sur l'Oq SO, 1° O de la rose des vents. L'arc de loxodromie à parcourir sera de 2985 milles et, à raison d'une vitesse de 13 nœuds, le paquebot fera cette traversée en 9 jours et demi.

Usage des cartes marines.

Ces problèmes se résolvent aussi, graphiquement, à l'aide des cartes marines dont nous avons donné le principe. On sait que les angles sont conservés sur ces cartes, et que les arcs de loxodromie y sont figurés par des droites. On aura donc immédiatement la route de Brest à New-York en tirant une droite d'un de ces

Fig. 98.



points à l'autre, et en mesurant au rapporteur l'angle V sous lequel cette droite coupe le méridien. Quant à la vraie longueur s de l'arc de loxodromie représenté sur la carte par la longueur dilatée ab (*fig.* 98), elle sera donnée par la construction suivante :

Considérez qu'une portion $a'\,b'$ de méridien, comprise entre les

parallèles λ et λ', est elle-même une loxodromie dilatée dans la même proportion que toute autre loxodromie ab tracée entre les mêmes parallèles; seulement, pour cette loxodromie particulière, la carte donne immédiatement le rapport de dilatation.

En effet, λ' se lit sur la graduation du méridien central, ainsi que λ; on a donc par $\lambda' - \lambda$ la vraie valeur de l'arc $a'\,b'$ en parties de la circonférence. Prenez sur la graduation de l'équateur une longueur égale à l'arc $\lambda' - \lambda$ ainsi obtenu, et portez-la de a' en c' sur le méridien du point a'; puis, par le point c', menez cc' parallèle à bb'; ac sera la vraie grandeur de l'arc de loxodromie représenté en ab. Vous l'évaluerez en degrés et minutes en portant avec un compas la longueur ac sur la graduation de l'équateur.

Le problème inverse : étant donné sur la carte le point de départ a, l'angle de route V et l'arc de loxodromie s que le navire vient de parcourir, déterminer le point d'arrivée b, se résout d'une manière analogue. On prendra sur l'équateur un arc comprenant le nombre de milles ou de minutes contenu dans s, et on le portera en ac sur une droite indéfinie tirée du point a sous l'azimut V. En la projetant en $a'\,c'$ sur le méridien central (qui porte les divisions), on aura $a'c' = s \cos V = \lambda' - \lambda$. Évaluez $a'c'$ en degrés et minutes en le portant sur l'équateur; si vous retranchez ce nombre de degrés de λ', vous aurez λ. Or, sur la carte marine, le parallèle de colatitude λ se trouve marqué en b'; il suffira donc de mener $b'b$ parallèle à $c'c$ pour obtenir en ab la représentation de s sur la carte et par suite pour y marquer le point d'arrivée b.

On a chaque jour des constructions de ce genre à faire sur la carte pour y marquer le point d'arrivée, lequel devra servir de point de départ de la route à suivre ultérieurement. On comprend, en effet, qu'il n'est pas toujours possible, à cause du vent, de la dérive, etc., de suivre exactement la route prescrite. Il faut donc chaque jour faire le point, c'est-à-dire déterminer graphiquement sur la carte la position du navire à une heure donnée.

Ces opérations commencent dès que le pilote a conduit le navire en pleine mer en se guidant sur des bouées, des balises, des phares, des repères familiers. La terre étant encore en vue, le commandant, qui a repris la conduite de son navire, fait relever des points connus sur la côte à l'aide d'une boussole employée comme théodolite (compas de relèvement). Soient A et B deux de ces points

observés du navire C, par les azimuts V et V'. Les azimuts du navire, vu de ces points, seront respectivement V + 180°, V' + 180°. On trace deux droites sur la carte sous ces azimuts-là : leur intersection en C donnera sur la carte la position du navire. Tel sera le point de départ des opérations subséquentes.

On peut ainsi conduire par estime un navire jusqu'à l'atterrissage. Toutefois les erreurs des évaluations des s et des V s'accumulent et finissent par atteindre un total fort dangereux. Si le ciel reste couvert, si le navigateur forcé de renoncer aux observations astronomiques n'a, vers la fin de son voyage, que le résultat de l'estime journalière, il est tenu à beaucoup de prudence. Bien avant le terme qu'il serait porté par l'estime à assigner à son voyage, il fera faire de temps en temps des opérations de sondage (1) et enverra des vigies dans les mâts pour signaler la terre. Lorsque la terre sera en vue, il se trouvera peut-être bien loin du port. A l'aide de vues panoramiques des côtes, il tâchera de reconnaître les signaux naturels qu'elles peuvent présenter, de manière à déterminer la vraie position de son navire et se mettre en état d'atterrir.

Dans les conditions ordinaires, on ne peut guère gouverner qu'à 2° ou 3° près, et déterminer la vitesse linéaire qu'à $\frac{1}{20}$. Au bout d'une dizaine de jours de navigation à 12 nœuds, c'est-à-dire à 12 milles par heure, on ne saura guère, par l'estime seule, autre chose que ceci : le navire doit se trouver quelque part dans un cercle de 4° de rayon ayant pour centre le point marqué sur la carte comme étant la dernière position estimée.

---

(1) Les cartes *à grand point* que tout navire emporte pour les régions qu'il doit visiter donnent l'hydrographie des côtes, c'est-à-dire les profondeurs de la mer à plusieurs milles du rivage.

CHAPITRE XIII.

INSTRUMENTS DE LA NAVIGATION ASTRONOMIQUE.

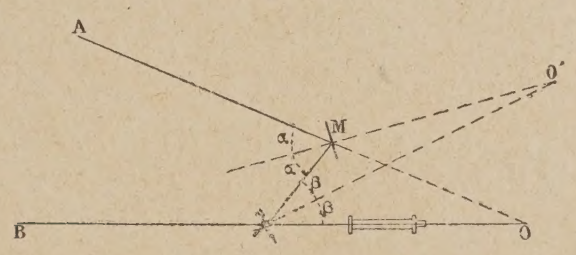
La navigation astronomique a pour but de déterminer chaque jour la position exacte du navire à l'aide d'observations célestes, de manière à rectifier l'estime et à éviter l'accumulation de ses erreurs. On navigue alors à quelques minutes et non plus à quelques degrés près. Ces observations à bord des navires exigent des instruments de mesure d'angles tels que les mouvements du navire soient sans influence sur les résultats des observations et qui n'aient pas besoin d'une installation stable. Le *sextant* est le type de ces instruments; il faut y joindre le chronomètre et la *Connaissance des Temps*, publiée d'avance, chaque année, par le Bureau des Longitudes. Les inconnues à déterminer par l'observation sont λ et $L = H - H_p$, c'est-à-dire la colatitude, l'heure du lieu et celle de Paris au même instant. L'estime ne sert plus qu'à fournir chaque jour des valeurs approchées des inconnues λ et L, ou plutôt le chemin fait à partir de la dernière détermination astronomique. Nous aurons, par rapport à l'heure de Paris H_p, à exposer trois méthodes : 1° celle des chronomètres ou montres marines, réglés sur l'heure de Paris avant le départ, et qu'on suppose devoir marquer ensuite cette heure pendant tout le voyage; 2° la méthode des distances lunaires dans laquelle les positions observées de la Lune, comparées avec les positions calculées pour l'heure de Paris dans la *Connaissance des Temps*, donnent également H_p; 3° celle de toutes la plus précise, l'envoi de l'heure de Paris par T. S. F.

Le sextant.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sur un miroir, il est réfléchi en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Si l'on fait tourner le miroir d'un certain angle, le rayon réfléchi change de direction et tourne d'un angle double. On s'est servi de cette propriété pour construire des instruments destinés à mesurer les angles entre deux objets, l'un vu directement par la lunette, l'autre vu par la même lunette, mais par réflexion sur un miroir placé sur le trajet des premiers rayons et ne couvrant que la moitié de l'objectif. Ces instruments étaient inapplicables en mer, car le moindre mouvement du navire, en déplaçant le miroir, faisait dévier d'un angle double les rayons réfléchis, et empêchait ainsi la superposition des images des deux objets. Mais, si, au lieu d'une seule réflexion, on en emploie deux, les choses changent complètement; la direction d'un rayon doublement réfléchi devient indépendante de la position des deux miroirs; pourvu que l'angle de ceux-ci ne change pas, on peut faire tourner leur ensemble sans que le rayon émergent, après deux réflexions, change le moins du monde de direction. Un instrument fondé sur ce principe aura donc l'avantage de n'avoir pas besoin d'une installation fixe.

Dans la figure 99, où il s'agit de la mesure de l'angle AOB, le rayon AO est doublement réfléchi par les deux miroirs M, m et se trouve ainsi amené dans la direction mO. Menons les normales

Fig. 99.



MO′ et mO′ aux deux miroirs; la première sera la bissectrice de l'angle AMm, la seconde celle de l'angle MmO. Le triangle MmO′ donne

$$\alpha = O' + \beta;$$

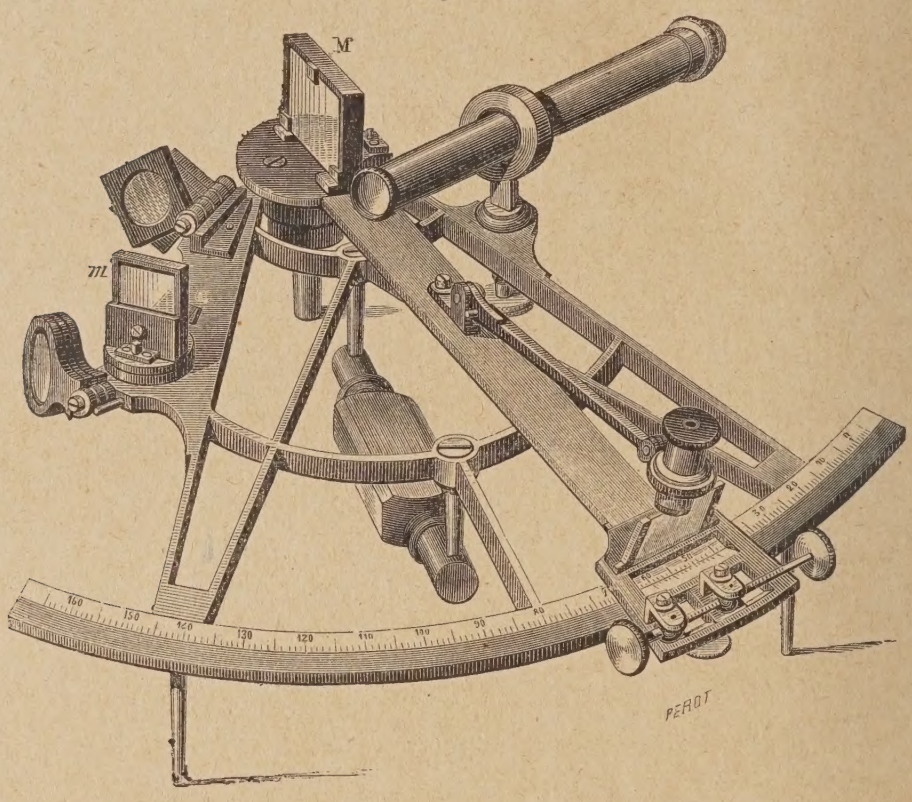
le triangle MmO donne

$$2\alpha = O + 2\beta;$$

donc O = 2 O′. Si l'angle O′ des deux miroirs reste constant, de quelque manière qu'on présente leur système au rayon AO, la direction du rayon émergent, après deux réflexions, sera BO ou une parallèle à cette droite.

Pour construire sur ce principe un instrument de mesure angulaire, il suffit de placer une lunette sur le trajet O *m* B, de manière

Fig. 100.



à viser directement l'objet B, vu par-dessus le miroir *m* (1) et à l'aide d'une partie de l'objectif, puis de faire varier l'angle des deux miroirs de manière à amener, par deux réflexions, les rayons venus de l'objet A dans la direction B *m* O. L'image de cet objet sera vue dans la lunette par l'autre moitié de l'objectif. Lorsque les deux images se trouveront en coïncidence, l'angle des deux directions AO et BO sera égal au double de l'angle des deux miroirs.

Cela posé, montons les deux miroirs et la lunette sur un châssis portant un arc de cercle divisé et, au centre de ce cercle, un pivot autour duquel le miroir M puisse tourner, entraînant avec lui une

(1) Ou par une moitié non étamée de ce miroir.

alidade à vernier, tandis que le petit miroir reste invariablement fixé au châssis : on aura le sextant, inventé d'abord par Newton, puis par Godfrey, de Pennsylvanie, et enfin par Hadley.

L'angle actuel des deux miroirs est donné par la lecture de la division qui répond à la direction de l'alidade; il se lit sur le limbe divisé; en le doublant, on a l'angle des deux directions AO et BO.

Cet admirable instrument est applicable à la mer; car, si le roulis ou le tangage déplace les images des deux astres dans la lunette que l'observateur tient, il ne les séparera pas lorsqu'elles auront été amenées à la coïncidence; elles ne feront que se mouvoir ensemble dans le champ de la vision.

L'origine de la graduation du limbe devrait être le point où se place l'alidade quand les deux miroirs sont parallèles. Pour déterminer ce point, on dirige l'instrument sur un objet très éloigné, le Soleil par exemple. On en voit deux images, l'une directe, l'autre par double réflexion. On amène la seconde à coïncider avec la première : la division *u* où s'arrête alors le zéro de l'alidade est l'origine des angles formés par les deux miroirs. Il faut donc retrancher *u* de toute lecture du limbe correspondant à un angle mesuré. Le mieux, quand on opère sur le Soleil, est de mettre les deux images en contact par leurs bords voisins, puis par leurs bords opposés, et de prendre la moyenne des indications du vernier. Comme vérification, la demi-différence des deux lectures doit donner le diamètre angulaire du Soleil.

Pour éviter de doubler les lectures du limbe, on divise celui-ci en demi-degrés et on les numérote comme des degrés entiers.

Rectification du sextant.

Pour que le théorème d'Optique mentionné plus haut se trouve réalisé, il faut que la double réflexion s'opère dans un plan perpendiculaire aux deux miroirs. De là cette triple condition : chaque miroir doit être perpendiculaire au plan de l'instrument; l'axe optique de la lunette doit être parallèle à ce plan.

1° *Perpendicularité du grand miroir.* — En regardant par réflexion dans le grand miroir le limbe de l'instrument, l'œil étant

placé très près du plan de ce limbe, on verra en même temps une portion de ce limbe directement, et cette même partie par réflexion. Si la partie réfléchie n'est pas sur le prolongement de la première, il y a un défaut de perpendicularité que l'on corrige à l'aide des vis propres du grand miroir.

Ce procédé, fort rapide, n'est pas rigoureux, parce que l'œil doit se placer au-dessus du plan du limbe et ne le voit pas ainsi, par réflexion, dans un plan exactement perpendiculaire au grand miroir. Il faut donc élever le plan du limbe à la hauteur de l'œil. On y parvient à l'aide de petites équerres égales nommées *viseurs*, qu'on place sur le limbe de part et d'autre de l'alidade, et d'un troisième viseur qui détermine la position de l'œil. L'opération se fait d'ailleurs comme précédemment; il faut que l'arête supérieure du viseur réfléchi soit sur le prolongement de l'arête de celui qu'on voit directement.

2° *Perpendicularité du petit miroir.* — Si celui-ci n'est pas perpendiculaire au plan du limbe, on ne pourra pas amener le grand miroir, bien rectifié, au parallélisme avec le premier. Quand on pointera la lunette sur le Soleil, il n'y aura pas moyen d'en faire coïncider les deux images. Il faudra toucher aux vis de rappel du petit miroir en même temps qu'à celle de l'alidade, de manière à obtenir cette coïncidence.

3° Les angles doivent être mesurés dans un plan perpendiculaire aux miroirs et par suite parallèle au plan du limbe; il faut donc rendre l'axe optique de la lunette parallèle à ce plan. L'instrument étant fixé horizontalement sur une table, on visera, le long du plan du limbe, l'arête rectiligne d'un mur éloigné, et l'on regardera ensuite par la lunette pour voir si cette arête se trouve entre les deux fils du réticule placé au foyer de l'objectif de la lunette. Dans le cas contraire, on déplacera cette plaque à l'aide d'une vis spéciale jusqu'à ce que cette arête soit au milieu des fils.

Au fond, l'axe optique ne joue pas ici le même rôle que dans les autres instruments de mesure. La croisée des fils des lunettes ordinaires est remplacée, dans celle du sextant, par deux fils parallèles, assez écartés, entre lesquels doivent être maintenues les images; mais celles-ci peuvent occuper toutes les positions dans la bande limitée par ces fils.

Nous ne parlerons pas du *prismatique* des miroirs. Il est facile de s'assurer que les miroirs ont leurs faces parallèles en y regardant, avec une lunette, un astre par réflexion. Si le miroir est prismatique, on verra deux images, et alors il faudra refuser le miroir. De même, les verres obscurcissants qu'on interpose sur le trajet des rayons du Soleil pour affaiblir son éclat et le rendre comparable à celui de la Lune dans la mesure des distances lunaires, ou à celui de l'horizon de la mer quand on mesure une hauteur, doivent être rebutés si leurs faces ne sont pas parallèles.

Mesure des hauteurs angulaires.

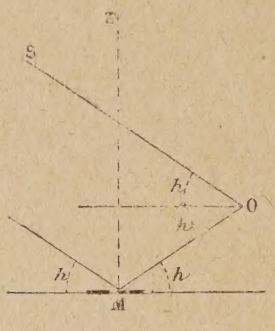
Le sextant sert à mesurer la distance angulaire de deux points quelconques; mais son application principale en mer est la mesure des hauteurs comptées à partir de la ligne d'horizon. L'observateur, tenant le limbe de l'instrument dans le vertical de l'astre, pointe la lunette sur la ligne d'horizon; puis, en faisant tourner l'alidade, et par conséquent le grand miroir, il amène l'image deux fois réfléchie de l'astre dans le champ de la lunette. S'il s'agit du Soleil ou de la Lune, il établit le contact du bord supérieur ou du bord inférieur avec la ligne d'horizon. La division du limbe à laquelle s'arrête le zéro de l'alidade donne, sauf correction pour le point de parallélisme des miroirs, la hauteur angulaire du bord observé au-dessus de l'horizon de la mer. Pour avoir la hauteur vraie, comptée à partir du plan horizontal de l'observateur, il faut retrancher la dépression, élément réduit en Tables qu'on trouvera plus loin. Le complément de cette hauteur vraie est la distance zénithale.

Hauteurs observées à terre.

La mesure des hauteurs angulaires, à terre, exige l'emploi d'un horizon artificiel sur lequel on observe le Soleil par réflexion avec la lunette, tandis qu'on amène l'image directe dans le champ par double réflexion. On obtient ainsi le double de la hauteur de l'astre observé, ainsi qu'on le voit en jetant un coup d'œil sur la figure 101. Le miroir est, d'ordinaire, un plan de verre noir qu'on place sur un support et qu'on rend bien horizontal à l'aide d'un niveau. Il vaut

mieux recourir à un bain de mercure. On emploie pour cela une simple cuvette sphérique très peu courbe, en cuivre argenté, dans laquelle on verse le mercure. Ce liquide mouille les parois de cette sorte de vase, et, si on lui donne tout juste la profondeur nécessaire

Fig. 101.



pour éviter les effets de la capillarité, sa surface sera peu sensible aux petits mouvements de l'air. Lorsqu'on est forcé de le recouvrir d'une glace, il faut faire deux observations de hauteur en donnant à la glace deux positions symétriques, c'est-à-dire en la tournant dans son plan de 180°, pour que la moyenne des deux hauteurs soit indépendante du défaut de parallélisme des faces de ladite glace.

Degré de précision d'une mesure au sextant.

Supposons un sextant bien divisé et exempt d'erreur d'excentricité, des miroirs bien plans, à faces bien parallèles, des verres obscurcissants irréprochables : 1° Il faudra le rectifier par une série d'opérations qui laisseront quelques défauts. De là une première source d'erreurs très petites dont les mesures seront affectées plus ou moins, suivant les cas. 2° Il faudra déterminer le point de parallélisme des miroirs, point qui sert d'origine aux divisions du limbe. Cette opération comporte une nouvelle erreur fort petite, mais non nulle en général. Il y aura encore : 3° l'erreur de pointé ; 4° l'erreur due à l'inclinaison dont nous venons de parler ; 5° l'erreur de lecture du vernier, qui donne les 10″, mais sur lequel on apprécie fort bien les 5″ ; 6° l'erreur de la dépression. Admettons, pour fixer les idées, que toutes ces erreurs soient de 5″ et qu'elles aient bien le caractère d'erreurs accidentelles. Alors l'erreur probable d'une mesure

de hauteur au sextant, avec un bon instrument et dans des circonstances favorables, sera $\pm\sqrt{5^2\times 6} = \pm 12'',4$ ou $\pm 0',2$.

Si les erreurs systématiques sont réellement négligeables, les observations n'étant plus exposées qu'à des erreurs accidentelles de pointé et de lecture, on parvient à réduire notablement l'erreur susdite en recommençant la même mesure m fois de suite, avec le même soin, et en prenant la moyenne des résultats. L'erreur probable de cette moyenne sera $\pm\frac{0',2}{\sqrt{m}}$. Avec quatre mesures seulement, on réduirait l'erreur à $0',1$ [1].

A terre, on obtient naturellement plus d'exactitude; en outre, comme on mesure le double de la hauteur, l'erreur probable de la hauteur simple sera réduite de moitié. L'erreur probable d'une mesure double étant de $7''$ à $8''$, on parvient à réduire cette erreur à $2''$ ou $3''$ par un nombre modéré d'observations.

Il faut pourtant reconnaître au sextant un vice réel; c'est que son limbe ne s'étend pas à une circonférence entière. Il n'est pas possible d'éliminer l'erreur d'excentricité et une partie des erreurs de division par l'emploi de deux verniers opposés. Les dilatations doivent en altérer plus ou moins la figure. Le *cercle à réflexion* de Borda lui est donc bien supérieur quand il s'agit de mesures délicates. On préfère néanmoins le sextant, parce que la manœuvre en est plus simple; il est moins lourd et coûte moins cher.

Dépression de l'horizon de la mer.

Nous avons vu que la dépression géométrique a pour valeur approchée

$$d = 206\,265''\sqrt{\frac{2h}{r}},$$

en nommant h l'altitude de l'œil au-dessus du niveau de la mer et r le rayon de la Terre. La réfraction géodésique élève un peu

---

[1] Pour peu que la mer soit agitée et l'horizon mal terminé, cette erreur probable devient beaucoup plus grande. La distance angulaire de deux astres s'obtient, dans tous les cas, avec plus d'exactitude que les hauteurs : le pointé est bien plus précis, parce que la ligne d'horizon n'intervient plus.

cette ligne d'horizon. Pour en tenir compte, il faut multiplier l'expression précédente par $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$, m étant égal à 8,2.

On obtient ainsi le tableau suivant, où l'on peut prendre, à vue, la dépression qui convient à la hauteur de l'œil de l'observateur :

Hauteur de l'œil.	Dépression géométrique.	Dépression réelle.
m	′ ″	′ ″
1.....	1.56	1.48
2.....	2.44	2.33
3.....	3.20	3. 8
4.....	3.51	3.37
5.....	4.19	4. 2
6.....	4.43	4.25
7.....	5. 6	4.47
8.....	5.27	5. 6
9.....	5.47	5.25
10.....	6. 6	5.43
20.....	8.37	8. 4
30.....	10.33	9.53
40.....	12.11	11.25
50.....	13.38	12.46
100.....	19.16	18. 3

Chronomètres.

Les chronomètres ont même rouage que les montres ordinaires; ils n'en diffèrent que par les dimensions et l'échappement. Les dimensions sont beaucoup plus grandes; destinés à être toujours maintenus à plat, leur boîte en cuivre cylindrique est lestée de plomb et reliée à une boîte extérieure carrée, en acajou, par une suspension à la Cardan, comme celle des boussoles. Elles échappent ainsi aux grands mouvements du roulis ou du tangage, et par suite aux inégalités de marche que les horlogers connaissent sous le nom de *variation du plat au pendu*. Au lieu de l'échappement à cylindre des montres vulgaires ou de l'échappement à ancre des bonnes montres, ils ont un système qui laisse presque constamment libre l'oscillation du régulateur. Celui-ci se compose d'un balancier et d'un ressort, comme dans les montres; mais le balancier est compensé pour les variations de température, et le ressort

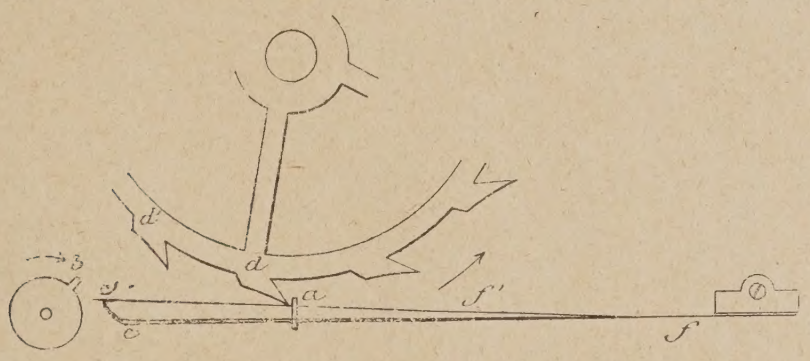
réglant est, non un spiral plat, mais un ressort en forme d'hélice. Quant à la force motrice, c'est toujours un ressort spiral enfermé dans un barillet; celui-ci communique avec le rouage par l'intermédiaire d'une chaîne d'acier et d'une fusée destinée à compenser la variation continuelle de force d'un ressort qui se détend.

Échappement libre à ressort.

En supposant que les oscillations du balancier autour de son axe soient bien isochrones lorsqu'il est libre, l'échappement doit être conçu de manière que le balancier, passant par sa position d'équilibre avec son maximum de vitesse, dégage une dent de la roue d'échappement, en levant un petit arrêt qui reviendra de lui-même à sa place. La roue d'échappement devenue libre tournera, sous l'action du moteur transmise par le rouage, de l'angle compris entre deux dents, et, la dent suivante rencontrant le petit arrêt, le rouage s'arrêtera de nouveau.

La figure 102 représente le moment où la dent *d*, qui bute contre

Fig. 102.



l'arrêt *a*, va être dégagée par l'action du régulateur, dont l'oscillation s'accomplit actuellement dans le sens de la flèche. L'arrêt *a* est une petite pierre fine enchâssée dans un long ressort *cf*. Ce ressort est poussé vers le bas par un doigt *b* fixé à l'arbre du balancier; il entraîne l'arrêt *a* et dégage ainsi la dent *d* de la roue d'échappement, qui commence à tourner. Mais, lorsque le doigt *b* s'est éloigné, le ressort revient aussitôt en place et l'arrêt *a* est choqué par la dent suivante *d'*, qui se trouve arrêtée à son tour.

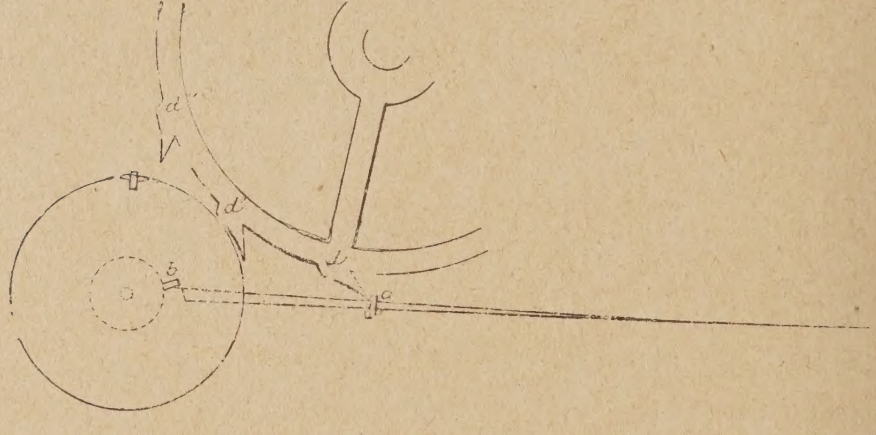
Il ne faut pas que, dans la seconde période de l'oscillation (de sens contraire à la flèche), le doigt *b* du balancier rencontre la

résistance du ressort *cf* buté en *a*. Pour cela, on recourbe celui-ci vers son extrémité *c* et on le recouvre d'un ressort beaucoup plus faible *c' f'*, qui dépasse un peu le premier. Quand *b* vient dans le sens de la flèche, il agit sur ce petit ressort, qui appuie sur le grand et l'entraîne; quand *b* agit dans le sens inverse, il ne rencontre que la très faible résistance du petit ressort *c' f'*; il le soulève sans déranger l'arrêt.

Ainsi une dent de la roue d'échappement passe à chaque oscillation complète du balancier, et presque aussitôt la dent suivante vient buter, avec un petit bruit sec, contre l'arrêt *a*.

L'échappement doit remplir une seconde fonction, celle de restituer au balancier la force vive qu'il perd à chaque instant par les diverses résistances qu'il éprouve, de manière à entretenir son mouvement oscillatoire. Pour cela, on fixe, sur un disque porté par l'axe du balancier (*fig.* 103) dans le plan même de la roue d'échap-

Fig. 103.



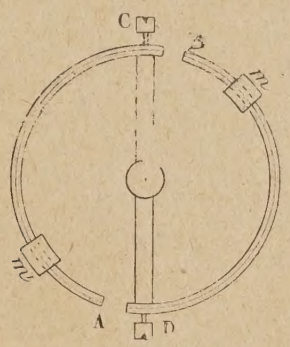
pement, un petit taquet *e* en pierre dure destiné à recevoir le choc de la troisième dent *d''* au moment où, la dent *d* étant dégagée, la roue d'échappement se met à tourner.

Lorsque *b*, qui commence à agir sur la détente, aura tourné du petit angle nécessaire pour rendre libre la dent *d*, le petit taquet *e* aura dépassé la dent *d''* et recevra un choc de cette dent au moment où, la roue d'échappement étant devenue libre, la dent *d''* se trouvera animée d'une vitesse linéaire plus grande que celle de *e*. A tout autre moment, la roue d'échappement étant fixée dans la position même de la figure, le taquet *e*, dont l'extrémité décrit une circonférence qui mord sur celle de l'extrémité des dents, passera librement entre les dents placées en *d'* et *d''*.

On voit que, si le chronomètre vient à s'arrêter, dans le cas, par exemple, où l'on aurait oublié de le remonter, il ne se remettra pas de lui-même en marche, comme les montres ordinaires, après avoir été remonté. Il faut, pour mettre le balancier en mouvement, obtenir un premier départ de l'arrêt *a*. Pour cela, on prend la boîte du chronomètre entre les mains et on lui imprime, avec précaution toutefois, un mouvement brusque de rotation, suffisant pour dégager la dent *d*.

Évidemment la régularité de la marche exige l'isochronisme des oscillations du balancier. Comme ces oscillations varient d'amplitude, par suite des résistances, variables avec le temps, du rouage et des pivots, qui diminuent peu à peu l'action de la force motrice,

Fig. 104.



il faut que cet isochronisme ait lieu quelle que soit l'amplitude des oscillations. Heureusement il y a deux manières de réaliser cet isochronisme. La première a été découverte par Pierre Leroy, célèbre horloger français. Il a constaté qu'avec un ressort donné, en forme d'hélice cylindrique, on peut toujours, en le diminuant peu à peu de longueur, rencontrer à chaque spire une longueur telle que les grandes oscillations aient même durée que les petites.

La seconde manière de réaliser l'isochronisme sans toucher à la longueur du ressort est due à Phillips, professeur de Mécanique à l'École Polytechnique. Elle consiste à donner au ressort, dans les deux parties où il dévie de la forme hélicoïdale pour aller s'encastrer en haut dans le pont du balancier, en bas dans le corps du balancier lui-même, certaines formes géométriques que l'analyse fait connaître et que l'art réalise avec une grande perfection. Quand ces courbes terminales sont bien exécutées, les réactions que les parties encastrées exercent sur la lame se réduisent à un

couple, et la figure du ressort, hélicoïdale à l'état de repos, reste encore hélicoïdale dans ses contractions et dilatations successives à l'état du mouvement. Le centre de gravité du spiral oscillant ne cesse pas de coïncider avec son axe. Enfin les réactions latérales des pivots sont nulles; en d'autres termes, les pivots n'ont aucune tendance à exercer une pression latérale contre leurs supports. Tous les chronomètres construits d'après ces principes ont une marche régulière.

Réglage des chronomètres.

Un chronomètre doit battre à très peu près 86 400^s par jour solaire moyen. S'il en bat 86 400 $-m$, m est le retard diurne ou la marche diurne du chronomètre. Cette marche m, positive ou négative, doit toujours être réduite à un petit nombre de secondes. Pour obtenir ce résultat dans une horloge, on fait varier peu à peu la longueur l du pendule. En effet, la durée t d'une oscillation d'un pendule de longueur l est, en secondes de temps moyen,

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

g étant l'intensité de la pesanteur au lieu considéré. Or π est un nombre constant; g ne varie pas tant que le pendule reste au même lieu : il suffit donc d'agir sur l, de le raccourcir si l'horloge retarde, de l'allonger un peu si elle avance, jusqu'à ce qu'enfin m soit réduit au point jugé convenable. Cette opération est si simple qu'il n'est pas besoin d'un horloger pour l'exécuter.

Quant aux chronomètres. la durée d'une oscillation est

$$\pi\sqrt{\frac{l\mathrm{I}}{\mathrm{E}}},$$

formule où l représente la longueur du spiral, E son sommet d'élasticité, I le moment d'inertie du balancier. Dans les montres ordinaires se trouve une *raquette* qui permet d'allonger ou de raccourcir quelque peu le spiral, et par suite de faire varier l de manière à produire le même effet que sur le pendule. On parvient ainsi à régler une montre ordinaire et à réduire sa marche diurne au taux convenable. Mais, en agissant de même sur le spiral hélicoïdal d'un

chronomètre, on altérerait, comme on l'a vu plus haut, l'isochronisme de ses oscillations; c'est donc sur le facteur I, moment d'inertie du balancier, qu'il faut opérer pour en faire varier quelque peu la durée. A cet effet, la barrette du balancier porte à ses deux bouts des vis C et D à têtes très massives (*fig.* 104). En les faisant tourner délicatement à la fois (pour ne pas troubler l'équilibre du balancier), de manière à les rapprocher, par exemple, du centre des oscillations, I diminue et par suite la durée de l'oscillation devient moindre. On réussit par là, au moyen de tâtonnements d'une grande délicatesse qui ne peuvent être confiés qu'à un homme de l'art, à annuler ou du moins à réduire la marche d'un chronomètre. Un astronome règle sa pendule quand il lui plaît; un marin ne doit jamais toucher à son chronomètre, excepté pour le remonter.

Influence de la température. — Compensation.

Mais ce réglage des pendules ou des montres ne compte que pour la température à laquelle on a opéré. A d'autres températures, les chronomètres changent de marche comme les pendules, mais en vertu de causes bien différentes. Pour une horloge, lorsque la température augmente, l augmente aussi; comme c'est la seule quantité influencée, il suffit d'annuler l'effet de la température par l'artifice bien connu de la grille compensatrice. On rend ainsi l invariable à toute température. Dès lors, une horloge dont le pendule est muni de cet appareil correcteur conserve la même marche l'hiver que l'été, ou du moins ne varie plus qu'en vertu de causes tout à fait étrangères à la température. Il en est tout autrement des chronomètres : les trois facteurs l, I, E varient à la fois avec la température; l s'allonge quand celle-ci augmente; I augmente aussi, puisque les masses qui composent le balancier s'écartent du centre d'oscillation, et E, qui représente ici la force réglante et joue le même rôle que g dans les horloges, diminue. Il n'y a donc plus aucune analogie entre les montres et les horloges lorsqu'il s'agit de la compensation.

L'effet le plus considérable vient de l'élasticité du ressort, c'est-à-dire de la force régulatrice; son moment diminue à peu près de $\frac{1}{4000}$ pour 1° d'élévation de température. Comme E figure au

dénominateur sous un radical dans l'expression précédente, l'augmentation de durée d'une oscillation sera, de ce chef, de $\frac{1}{8000}$; et comme il y a 86 400 oscillations par jour exécutées sous l'action de cette force, le retard diurne dû à un seul degré d'augmentation de température sera d'une dizaine de secondes. Il s'en faut de beaucoup que la variation correspondante de l ou de I produise un effet pareil. C'est donc la diminution de E qu'il faut compenser avant tout, en diminuant le moment d'inertie dans une proportion bien plus grande que l'effet directement exercé sur le balancier par la dilatation de son anneau. On n'y parviendrait pas en opposant dilatation à dilatation comme dans la grille compensatrice des pendules : il faut recourir à une combinaison encore plus sensible à l'action de la chaleur. On l'a trouvée dans les lames formées de deux métaux soudés et inégalement dilatables; ces lames se courbent fortement sous la moindre impression de chaleur, au point qu'on en a fait des thermomètres d'une sensibilité extrême.

L'anneau du balancier est coupé en deux points opposés A et B, près de la barrette à laquelle sont fixées les extrémités des deux demi-anneaux (*fig.* 103). Il est formé de deux lames courbes soudées, l'une extérieure en laiton, l'autre intérieure en acier, et portant vers les extrémités libres deux petites masses m et m'. Lorsque la température croît, la courbure de ces lames augmente et les masses m, m' se rapprochent très sensiblement du centre. Le moment d'inertie diminue ainsi bien plus qu'il ne le faudrait pour compenser la dilatation de la barrette. Comme ces masses peuvent glisser chacune le long du demi-anneau qui la porte, l'horloger cherche, par un tâtonnement excessivement délicat, la position où il doit fixer ces masses pour compenser les variations des facteurs l et I, et surtout celle de E. Il opère successivement à deux températures très différentes, 0° et 30° par exemple, et déplace les masses compensatrices jusqu'à ce qu'il ait obtenu la même marche dans les deux cas.

Si l'on connaissait exactement la loi suivant laquelle E varie avec la température, on chercherait la forme qu'il faudrait donner au balancier pour compenser exactement les variations de E. Il suffirait, en effet, que les petits changements ΔI et ΔE, produits par un même accroissement de température, fussent proportionnels à I et à E. Le chronomètre, une fois compensé à deux tempéra-

tures extrêmes, le serait aussi pour toutes les températures intermédiaires. Malheureusement cette proportionnalité n'existe pas ou ne se réalise qu'accidentellement; il en résulte qu'entre 0° et 30°, le chronomètre prendra en général du retard; au delà de 0° ou de 30°, il prendra de l'avance, ou réciproquement. La compensation la mieux exécutée de cette manière laisse donc subsister une partie de l'influence de la chaleur que les horlogers appellent l'*erreur secondaire*, erreur dont les marins doivent tenir compte avec le plus grand soin s'ils veulent tirer bon parti de leurs chronomètres. Par ce qui précède, on voit clairement que cette erreur secondaire offre un caractère régulier; c'est une fonction plus ou moins simple de grandeurs physiques susceptibles de mesure. Il est vrai que la Mécanique et l'Analyse ne sont pas en état aujourd'hui d'en déterminer la forme *a priori*, en considérant la figure des pièces, leurs dilatations, les variations de leur élasticité; mais nous étudierons cette loi par la voie de l'expérience, méthode dont ce Cours présente plusieurs exemples.

Le chronomètre doit être débarrassé de son enveloppe et placé dans une étuve dont on fait varier à volonté la température. Lorsque la température de la première épreuve, 0° par exemple, est bien établie et maintenue constante pendant un temps suffisant, on détermine la marche diurne du chronomètre en le comparant à une pendule astronomique à plusieurs heures d'intervalle. On porte ensuite l'étuve à une température plus élevée, mais très graduellement, car une variation brusque aurait pour effet d'altérer la trempe ou l'élasticité du spiral. On détermine encore la marche à cette température par de nouvelles comparaisons avec la pendule de l'observatoire. En opérant ainsi successivement à des températures bien connues, de 0° à 30° par exemple, on parcourt toute l'échelle des températures auxquelles l'instrument sera exposé dans le cours d'une campagne ordinaire. On s'assure d'ailleurs, en revenant aux températures initiales, que le chronomètre reprend bien les marches déjà observées, en sorte que le phénomène qu'on étudie n'est pas troublé par des influences étrangères.

Cela posé, pour découvrir la loi de ces variations, il suffit de construire la courbe des marches, en prenant pour abscisses les températures θ et les marches m pour ordonnées. On obtient ainsi

un certain nombre de points par lesquels on fera passer une ligne courbe, en s'attachant, non pas seulement à la continuité du trait, mais aussi à celle de la courbure. La figure de cette courbe sera la traduction géométrique de la loi cherchée. L'équation de cette courbe, si l'on parvient à en découvrir l'espèce, sera l'expression analytique de la loi.

On peut facilement obtenir des tracés empiriques de ces courbes pour des chronomètres différents. Ce sont de véritables paraboles ayant leur axe perpendiculaire à la ligne des abscisses. Lieussou, ingénieur hydrographe, à qui nous devons cette importante découverte, a trouvé effectivement cette figure parabolique dans les courbes de marche de tous les chronomètres qu'il a étudiés. Or l'équation des paraboles, ainsi placées par rapport aux coordonnées m et θ, est de la forme

$$m = a + b\theta + c\theta^2,$$

ou bien

$$m = \alpha + c(\theta - \tau)^2,$$

équation qui se confond avec la première si l'on pose

$$a = \alpha + c\tau^2, \qquad b = -2c\tau.$$

La loi de l'erreur peut donc être énoncée ainsi : l'influence de la chaleur sur la marche d'un chronomètre est proportionnelle au carré de sa température, comptée à partir d'un certain degré du thermomètre. Lieussou a donné à ce degré le nom, peu usité aujourd'hui, de *température de réglage*. Depuis lors, cette loi a été vérifiée en tous pays pour tous les chronomètres convenablement étudiés; elle est universellement adoptée dans la pratique.

Outre l'influence de la température, les chronomètres sont soumis à des causes diverses d'irrégularités dont les effets très compliqués se développent avec le temps. Telles sont l'épaississement des huiles, l'usure des pivots, les secousses, les mouvements gyratoires imprimés au navire par le choc des lames, les trépidations du propulseur, etc. Ces causes échappent à toute analyse; c'est à elles que sont dues les anomalies que présentent souvent la marche des meilleurs chronomètres et même leur arrêt.

Conduite des chronomètres â la mer.

Ils doivent être enfermés dans une armoire à l'abri des variations notables de température. L'officier chargé des montres les remonte chaque jour à 9^h, lit le thermomètre de l'armoire et calcule, pour chaque chronomètre, la marche diurne par la formule

$$m = a + b\theta + c\theta^2.$$

Avant le départ, on a déterminé, par des observations astronomiques ou par le télégraphe, le retard ε du chronomètre sur l'heure du méridien initial à une certaine date. Chaque jour on ajoute à ce retard la marche diurne m, en sorte que, au bout de t jours après la date susdite, le retard du chronomètre sera $\varepsilon + m + m' + m'' + \ldots$. On sera donc en état de calculer ce retard pour une heure quelconque d'un jour donné.

Sur les navires de l'État, on embarque plusieurs chronomètres, afin d'obtenir par leur accord ou leur désaccord un certain contrôle de leur marche et parer ainsi, jusqu'à un certain point, aux chances de dérangement. Cependant ce procédé, bien préférable à l'emploi d'un seul chronomètre, ne donne pas une garantie suffisante pour peu que la traversée se prolonge au delà d'une certaine limite. Il faut que le navigateur soit en état de se passer de ses chronomètres et de déterminer l'heure du méridien initial des observations astronomiques.

La Connaissance des Temps.

Les Tables astronomiques du Soleil, des Planètes et de la Lune, dues principalement aux travaux des astronomes et des géomètres français, permettent de calculer, pour un instant quelconque, dans les siècles passés ou dans les siècles à venir, les coordonnées de ces astres. Mais ces calculs sont si longs, surtout quand il s'agit de la Lune, que l'usage habituel de ces Tables serait absolument impraticable pour les marins. Depuis deux siècles, époque où la

grande navigation a pris son essor, l'État a compris qu'il fallait faire calculer d'avance, pour les marins, les voyageurs et les astronomes, des éphémérides donnant les positions du Soleil, de la Lune et des principales planètes, de jour en jour, à une certaine heure (midi) en temps moyen du méridien initial, de manière qu'on en pût tirer à vue, ou par une simple partie proportionnelle, les coordonnées de ces astres à une heure et pour un méridien quelconques. C'est dans ce but que le Bureau des Longitudes a été chargé de publier chaque année, au moins deux ans d'avance, la *Connaissance des Temps*.

Elle donne pour chaque midi, temps moyen du méridien initial, les coordonnées écliptiques et équatoriales du Soleil et des planètes.

Quant à la Lune, la rapidité et les inégalités de ses mouvements sont telles qu'il a fallu resserrer beaucoup cet intervalle. La *Connaissance des Temps* donne les coordonnées de la Lune de deux en deux heures, d'un bout à l'autre de l'année, en temps du méridien initial. Enfin les coordonnées de 95 étoiles circumpolaires sont données de deux en deux jours, et celles de 480 étoiles non circumpolaires, de dix en dix jours.

La *Connaissance des Temps* publie en outre les éclipses de Lune et de Soleil, les occultations des étoiles par la Lune et les éclipses des satellites de Jupiter. On y trouve des Tables de réfraction et de parallaxe, et les positions géographiques les plus exactes des observatoires astronomiques. On y ajoute une instruction détaillée, pour les calculs d'ailleurs fort simples qu'il faut exécuter lorsqu'on doit faire emploi de cette éphéméride.

Les navigateurs emportent avec eux le volume de la *Connaissance des Temps* dont ils auront besoin. Ils y puisent les coordonnées des astres qu'ils observent journellement pour déterminer leur position. Celles du Soleil sont exactes, à la seconde d'arc près. Celles des planètes n'ont pas tout à fait la même précision, mais les erreurs des Tables ou des éphémérides ne dépassent guère $5''$ ou $6''$.

Quant à la Lune, les Tables de Radau, établies d'après la théorie de Delaunay, sont affectées d'erreurs qui atteignent encore quelques secondes d'arc. Quoi qu'il en soit, les données de la

Connaissance des Temps répondent ainsi à toutes les exigences de la pratique.

Finalement il faut considérer les coordonnées des astres, telles qu'on les déduit, à vue ou par interpolation, de la *Connaissance des Temps*, comme des données exactes; il n'y a donc lieu de se préoccuper que des erreurs beaucoup plus fortes qui peuvent affecter les observations.

CHAPITRE XIV.

PROBLÈMES DE LA NAVIGATION ASTRONOMIQUE.

Ainsi que nous l'avons dit précédemment, l'estime est peu précise, car on ne détermine que la vitesse relative du navire par rapport à l'eau et l'on ne tient compte ni des courants, ni du vent, qui font aller le navire à la dérive; le loch, d'autre part, ne donne la vitesse qu'avec une certaine incertitude. Il en résulte à la longue des erreurs qui peuvent atteindre des valeurs considérables sur la position du navire. Il est donc de toute nécessité, dans la navigation hauturière, de corriger l'estime par des observations astronomiques faites le plus souvent qu'on le pourra.

Le problème de la navigation astronomique se réduit à ces termes : déterminer, à un instant donné, par les astres, la colatitude λ, la longitude L, l'azimut A.

Comme $L = H - H_p$, si l'heure du méridien initial est donnée par les chronomètres avec une précision suffisante, le problème se ramène, pour la longitude, à déterminer l'heure du bord H.

Dans les formules de transformation

$$(a) \qquad \cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \text{Æ H},$$

$$(b) \qquad \sin z \cos A = \sin\lambda \cos\delta - \cos\lambda \sin\delta \cos \text{Æ H},$$

$$(c) \qquad \sin z \sin A = \sin\delta \cos \text{Æ H},$$

on voit figurer les trois inconnues λ, H et A avec la donnée δ qu'on prend dans la *Connaissance des Temps* pour la date de l'observation, et la distance zénithale z que l'on mesure. En effet, s'il s'agit d'une étoile, $\text{Æ H} = H_s + \text{Æ}$; et s'il s'agit du Soleil, $\text{Æ H} = H_\odot = H + e$. Or, Æ ascension droite de l'étoile, ou e, équation du temps, se trouvent dans la *Connaissance des Temps*,

et, si l'on doit passer par l'heure sidérale H_s, le même recueil donne le moyen bien simple d'en conclure l'heure H de temps moyen.

Le problème se trouvera donc pleinement résolu par de simples mesures de distances zénithales pour l'heure et la colatitude. Quant à l'azimut d'un objet terrestre quelconque, il suffira de mesurer la distance angulaire du Soleil à l'objet, à un instant donné, et de déduire des formules (*b*) et (*c*) l'azimut du Soleil à cet instant.

On a vu que, pour obtenir la colatitude indépendamment de l'heure, et avec toute l'exactitude que comportent les observations de distance zénithale, il faut observer le Soleil très près du méridien, et que, pour obtenir l'heure indépendamment de l'erreur à craindre sur la colatitude, il faut observer l'astre choisi très près de l'azimut de 90° ou de 270°. De là, la pratique adoptée par les navigateurs : elle consiste à mesurer la distance zénithale du Soleil à l'instant de sa culmination pour en déduire λ, et à l'observer le même jour, le matin ou le soir, aussi loin que possible du méridien, pour obtenir l'heure.

C'est ce que l'on appelle la *méthode du point de midi*, qui se résume ainsi qu'il suit :

Vers 8^h du matin, on prend une hauteur du Soleil et l'on calcule l'heure en se servant de la latitude estimée déduite du point de la veille ; on en conclut une première valeur de la longitude. A midi, temps local, on prend une hauteur du Soleil, à sa culmination, laquelle donne une latitude exacte, d'où l'on peut, au moyen de l'estime appliquée au petit intervalle de temps compris entre 8^h et midi, calculer la longitude plus exacte de 8^h du matin et en conclure ensuite la longitude vraie de midi au moyen de l'estime.

Cette méthode d'approximations successives doit son succès à ce que l'erreur d'estime proportionnelle au temps est très faible pour le petit intervalle de 8^h à midi.

Donnons quelques détails sur les opérations à effectuer.

Détermination de la latitude par une culmination.

La culmination étant le point le plus élevé du parallèle diurne décrit par le Soleil, ce point serait dans le méridien du lieu si le δ du Soleil était invariable et si le navire ne faisait pas de route en

colatitude; mais ces deux circonstances ne donnent lieu qu'à des corrections très faibles, que nous négligerons d'abord. Voici en quoi consiste l'observation de midi. On commence l'observation avec le sextant un peu avant midi; en d'autres termes, on amène l'image doublement réfléchie du Soleil en contact avec l'horizon par son bord inférieur; puis, comme le Soleil continue à monter quelque peu, les deux images se séparent. On rétablit le contact à l'aide de la vis micrométrique, et l'on saisit bien aisément le moment où il se maintient de lui-même sans qu'il soit besoin d'agir sur la vis : c'est celui où la hauteur angulaire de l'astre atteint son maximum. On lit alors sur l'instrument la hauteur h du bord observé. En désignant par ρ, p, $\frac{1}{2}\Delta$ la réfraction, la parallaxe et le demi-diamètre du Soleil, on a, pour la distance zénithale méridienne,

$$90^0 - h + \rho - p + \frac{1}{2}\Delta = z_m,$$

et l'on en conclut λ par

$$\lambda = \delta - z_m.$$

Cette formule répond à tous les cas, c'est-à-dire à toutes les positions où l'observateur peut se trouver sur le globe terrestre, pourvu qu'on donne à z_m le signe $+$ si l'on a observé au sud et le signe $-$ si l'on a observé au nord.

Inutile d'ajouter que, si un obstacle quelconque faisait manquer l'observation de midi, on la remplacerait par des observations circumméridiennes.

Détermination de l'heure et de la latitude.

Le matin entre 7 et 9^h, temps local (ou le soir entre 17 et 18^h, si l'observation du matin n'a pu se faire), on mesure la distanec zénithale du Soleil à l'heure H_p du chronomètre. Soient z cette distance zénithale corrigée de la réfraction et de la parallaxe, λ la colatitude obtenue en ajoutant, au point de la veille ou à celle qu'on a observée à midi, le chemin parcouru dans le sens du méridien donné par l'estime. La même relation (a), résolue par rapport à H, donnera l'angle horaire du Soleil, c'est-à-dire l'heure

solaire vraie (1). On aura ainsi

$$\sin\frac{1}{2}(z-\delta+\lambda)\sin\frac{1}{2}(z+\delta-\lambda)=\sin\lambda\sin\delta\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{H}.$$

De $\mathrm{H}=\mathrm{H}_v$ on conclut l'heure moyenne H par $\mathrm{H}=\mathrm{H}_v-e$, e étant l'équation du temps fournie par l'éphéméride, et de H, on conclut la longitude par $\mathrm{L}=\mathrm{H}-\mathrm{H}_p$, H_p étant l'heure marquée par le chronomètre.

On sait que l'erreur à craindre sur λ aura d'autant moins d'influence sur l'H conclu que l'observation aura été faite plus près de l'azimut de 90° ou de 270°. On appréciera cette influence et celle de l'erreur commise dans la mesure de z par la relation différentielle

$$\sin\lambda\, d\mathrm{H}=\frac{dz}{\sin\mathrm{A}}+\frac{d\lambda}{\operatorname{tang}\mathrm{A}}.$$

Cette relation montre que, pour les mêmes erreurs dz et $d\lambda$, et les mêmes circonstances d'observation, c'est-à-dire à égalité d'azimut, la précision de l'heure ainsi obtenue décroît avec la colatitude.

Azimut. — Orientation.

Soient V l'angle de route, c'est-à-dire l'azimut où se trouve le cap du navire, (A) la différence d'azimut entre cette direction et celle du Soleil, et A l'azimut du Soleil au même instant. On aura

$$\mathrm{V}=(\mathrm{A})+\mathrm{A}.$$

Si donc à un instant donné, H heure du lieu, on mesure l'angle (A) à l'aide de la boussole de relèvement, fonctionnant comme théodolite, il suffira, pour avoir V, d'ajouter à (A) l'azimut actuel du Soleil. De H on conclut l'angle horaire $\mathrm{H}=\mathrm{H}_v$, puis on calcule A

---

(1) Les chronomètres de bord sont réglés non sur le temps sidéral, mais sur le temps solaire moyen. L'heure solaire vraie est l'angle horaire du Soleil à un instant donné; on verra dans la théorie du Soleil les raisons pour lesquelles on substitue au Soleil vrai un Soleil fictif, appelé *Soleil moyen*.

L'heure solaire moyenne est égale à l'heure solaire vraie corrigée d'une petite quantité appelée *équation du temps* : $\mathrm{H}=\mathrm{H}_v+e$.

par la formule résultant de la division de (b) par (c) :

$$\cot A \sin \mathcal{H} = -\sin\lambda \cot\delta + \cos\lambda \cos \mathcal{H}.$$

Variation du compas.

Si au même instant on lit, sur la boussole de l'habitacle, l'azimut magnétique M′ de la route suivie, et que l'on désigne par δ la déclinaison de l'aiguille aimantée et par D la déviation due aux fers du navire, on aura

$$M' + D + \delta = V = A + (A),$$

relation qui fera connaître la variation $D + \delta$, et même la déviation D si δ est connu pour le lieu de l'observation.

Discussion de cette méthode.

Elle ne portera que sur l'observation de la culmination du Soleil ou de la Lune. Ce moyen de déterminer la colatitude est précieux en voyage, parce qu'il n'exige même pas de montre. Si l'astre observé était une étoile, l'instant de la culmination coïnciderait avec celui du passage au méridien. Il en est autrement lorsque la distance polaire δ varie avec le temps et quand l'observateur est placé sur un navire en pleine marche. Différentions l'équation (a) par rapport à toutes les quantités qu'elle renferme en les considérant comme des fonctions du temps :

$$\begin{aligned}\sin z \frac{dz}{dt} = {} & (\sin\lambda\cos\delta - \cos\lambda\sin\delta\cos\mathcal{H})\frac{d\lambda}{dt} \\ & + (\cos\lambda\sin\delta - \sin\lambda\cos\delta\cos\mathcal{H})\frac{d\delta}{dt} \\ & + \sin\lambda\sin\delta\sin\mathcal{H}\frac{d\mathcal{H}}{dt}.\end{aligned}$$

A l'instant de la culmination, z atteint sa valeur maximum : par conséquent, $\frac{dz}{dt} = 0$. D'autre part, $\mathcal{H}$ étant très petit, on remplacera $\cos\mathcal{H}$ par 1 et $\sin\mathcal{H}$ par $\frac{\mathcal{H}}{3438'}$, en exprimant l'angle $\mathcal{H}$ en minutes

d'arc. On a ainsi

$$\text{Æ} = 3438' \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta \sin\lambda} \frac{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\delta}{dt}}{\frac{d\text{Æ}}{dt}}.$$

Il faudra porter cette expression dans celle de la réduction au méridien, ce qui donne, en remarquant que $\sin(\delta - \lambda) = \sin z_m$ est bien peu différent de $\sin \frac{z + z_m}{2}$, et en représentant par K le dernier facteur de la précédente formule,

$$z - z_m = \frac{3438'}{2} \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin z} \text{K}^2.$$

Le calcul de K ne présente aucune difficulté. Les variations qu'il comprend étant sensiblement constantes pour une heure entière, on remplacera $\frac{d\delta}{dt}$, par exemple, par $\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$, en faisant $\Delta t = 1^h$ ou 15^o ou $900'$, et en mettant pour $\Delta\delta$ la variation horaire de δ. De même, $\frac{d\lambda}{dt}$ sera égal au quotient du nombre de milles parcourus en une heure par le vaisseau, dans le sens du méridien, divisé par $900'$. Quant à $\frac{\Delta\text{Æ}}{\Delta t}$, on a, s'il s'agit du Soleil,

$$\text{Æ} = \text{H}_p + \text{L} - e, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta\text{Æ} = \Delta\text{H}_p + \Delta\text{L} - \Delta e,$$

expression où l'on remplacera ΔH_p par $900'$.

S'il s'agissait de la Lune, on aurait

$$\text{Æ} = \text{H}_{sp} + \text{L} - \text{Æ};$$

par suite,

$$\Delta\text{Æ} = \Delta\text{H}_{sp} + \Delta\text{L} - \Delta\,\text{Æ}.$$

Il est aisé de s'assurer que la correction qui en résulterait ne s'élèvera pas à $2'$, dans les circonstances les plus défavorables. On a donc raison de la négliger à la mer. Pour des observations soignées, faites à terre, il faudrait tenir compte de $\frac{d\delta}{dt}$.

Détermination simultanée de l'heure et de la colatitude. Problème de Douwes. Solution de Lalande.

La pratique précédente suppose un ciel découvert juste à l'instant favorable. S'il en était autrement, on obtiendrait encore

l'heure et la colatitude à l'aide de deux distances zénithales mesurées à des instants quelconques de la journée. C'est un problème fort simple, dont un navigateur hollandais, nommé Douwes, a donné autrefois une solution satisfaisante (*voir* p. 210).

Nous avons, du reste, déjà exposé cette méthode en Astronomie de position, dans la détermination des latitudes. Mais il faut ici tenir compte de ce que le navire, et par conséquent l'observateur, se déplace entre les deux observations.

Soient z et z' les distances zénithales du Soleil mesurées aux heures H_p et H_p du chronomètre ($H_p - e$ et $H''_p - e'$ seront les heures vraies en temps de Greenwich), δ et δ' les distances polaires, λ_1 et L_1 les coordonnées estimées du navire à l'instant de la première observation, enfin $\Delta\lambda$ et ΔL les changements en colatitude et en longitude qui se sont opérés dans l'intervalle des deux observations. Si $\mathcal{H}$ représente l'angle horaire inconnu du Soleil au premier instant, l'angle horaire au deuxième sera

$$\mathcal{H} + 15\,(H'_p - e' + \Delta L) - 15\,(H_p - e),$$

ou $\mathcal{H} + \alpha$, en désignant par α une quantité immédiatement calculable, et l'on aura les deux équations

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos\mathcal{H},$$
$$\cos z' = \cos(\lambda + \Delta\lambda) \cos\delta' + \sin(\lambda + \Delta\lambda) \sin\delta' \cos(\mathcal{H} + \alpha),$$

entre les inconnues λ et $\mathcal{H}$.

Nous verrons plus loin que la première équation représente, sur la sphère, un cercle de rayon z, que la deuxième est un second cercle de rayon z' légèrement déformé. Ces deux courbes se couperont en deux points, ce qui constitue deux solutions. Mais il n'y aura pas à hésiter entre les deux valeurs qu'on en pourrait tirer pour $\mathcal{H}$, puisque nous avons déjà, par l'estime, une solution approchée λ_1 et L_1, d'où l'on déduit $\mathcal{H}_1 = H_p - e + L_1$.

Le plus simple est de résoudre ces équations par les méthodes d'approximation qu'on enseigne en Algèbre. Nous suivrons en cela la voie tracée par Lalande. Des deux coordonnées que fournit l'estime, la plus sûre est ordinairement λ_1. Portons-en la valeur dans les deux équations et désignons par $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}'_2$ les valeurs qu'on en déduira pour l'angle horaire. Si λ_1 se trouvait être juste, ces deux valeurs du premier angle horaire seraient égales, c'est-à-dire

qu'on trouverait

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}'_2 ;$$

mais, en général, ces deux équations donneront, par ce premier essai, deux valeurs différentes. Désignons par $\partial\lambda$ la petite correction qu'il faut appliquer à λ_1. Si l'on augmente λ_1 de $\partial\lambda$, $\mathcal{H}_2$ augmentera de $\frac{\partial\lambda}{\sin\lambda \operatorname{tang} A}$ et $\mathcal{H}'_2$ de $\frac{\delta\lambda}{\sin(\lambda+\delta\lambda)\operatorname{tang} A'}$. On aura donc, pour déterminer la correction inconnue $\delta\lambda$, l'équation de condition

$$\mathcal{H}_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin\lambda \operatorname{tang} A} = \mathcal{H}'_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin(\lambda+\Delta\lambda)\operatorname{tang} A'}.$$

La correction $\partial\lambda$ étant obtenue, les éléments relatifs à la première observation seront $\lambda = \lambda_1 + \partial\lambda$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin\lambda \operatorname{tang} A}$, d'où résulte immédiatement la longitude L.

La formation de cette équation de condition exige le calcul des deux azimuts par les formules rappelées plus haut. On y emploie des tables à trois décimales.

Si l'on trouvait ainsi pour $\partial\lambda$ une valeur un peu forte, il y aurait lieu de craindre que les termes du deuxième ordre, omis dans le développement de $\mathcal{H}$, ne fussent pas négligeables (1). On regarderait alors le calcul effectué comme une première approximation. En le recommençant avec la valeur beaucoup plus exacte $\lambda_1 + \partial\lambda$, on obtiendrait, cette fois, une approximation bien suffisante.

Influence des erreurs d'observation.

Dans l'équation finale

$$\partial\lambda \left[\frac{1}{\sin(\lambda+\Delta\lambda)\operatorname{tang} A'} - \frac{1}{\sin\lambda \operatorname{tang} A} \right] = \mathcal{H}'_2 - \mathcal{H}_2,$$

le second membre est affecté des erreurs commises sur les mesures

(1) La variation de $\mathcal{H}$, correspondant à une variation $\partial\lambda$ de λ, peut être en effet développée en série suivant les puissances croissantes de $\partial\lambda$. Le premier terme est $\frac{1}{\sin\lambda \operatorname{tang} A}\partial\lambda$; on admet ici que $\partial\lambda$ est assez petit pour que les termes suivants en $(\partial\lambda)^2$, $(\partial\lambda)^3$, ... soient négligeables. Dans le cas contraire, on opère, comme il est dit plus haut, par approximations successives.

de z et de z'. Pour que ces erreurs influent le moins possible sur la correction conclue $\partial\lambda$, il faut agencer les observations de manière à rendre son coefficient aussi grand que possible. De là la règle qui prescrit d'observer dans deux directions azimutales faisant entre elles un angle bien ouvert, et aussi près que possible de 90° (1).

On a retourné ce problème de toutes les façons sans réussir à trouver de solution meilleure que celle de Lalande.

Droites et cercles de hauteur.

Nous avons vu qu'à l'aide des cartes marines, on substitue, au calcul, des constructions graphiques fort simples pour résoudre les divers problèmes de routes. On a cherché à en faire autant pour les problèmes astronomiques. C'est à quoi l'on parvient aisément en recourant à des cartes stéréographiques qui permettent de construire avec la règle et le compas tous les problèmes de la Trigonométrie sphérique. Mais, comme ces projections ne sont guère en usage à bord, on désirait utiliser les cartes de route ordinaires. Voici ce qui a mis les chercheurs sur la voie, il y a une quarantaine d'années.

Le capitaine Sumner se trouvait, en 1837, près de la côte d'Irlande (à destination de Grennock), sans avoir pu faire d'observation astronomique depuis qu'il avait dépassé le méridien de 318° 30′.

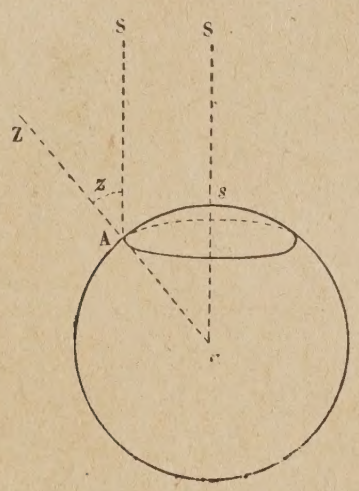
Dans la nuit du 17 décembre, le vent ayant passé au sud-est et l'estime donnant 400 milles du phare de Tuscan, avec la terre sous le vent, il gouverna est-nord-est, serrant le vent le plus possible. Quand le jour parut, rien n'était encore en vue. Vers $10^h\ 30^m$ seulement, le commandant put prendre une hauteur du Soleil. Avec le chronomètre (un bon instrument), il calcula sa longitude et trouva 339° 43′; mais, comme il avait fait près de 700 milles sans une seule observation, la colatitude employée dans le calcul de l'heure ne méritait aucune confiance. Pour apprécier l'effet d'une erreur possible en colatitude, il calcula encore deux autres

(1) En effet, en négligeant $\Delta\lambda$, le facteur de $\partial\lambda$ revient à $\dfrac{\sin(A'-A)}{\sin\lambda\,\sin A\,\sin A'}$.

longitudes, en partant chaque fois d'une colatitude de 10′ moins grande. Les trois points ainsi obtenus ayant été marqués sur la Carte, Sumner remarqua qu'ils se trouvaient sur une même droite dirigée est-nord-est et aboutissant au bateau-phare de Small, et comme son vaisseau devait se trouver sur cette droite (bien entendu dans la supposition d'une erreur nulle pour le chronomètre), la route est-nord-est fut maintenue, et le capitaine Sumner eut la satisfaction de se voir bientôt en vue du phare de Small.

La ligne à laquelle appartenaient ces trois points n'était pas

Fig. 105.



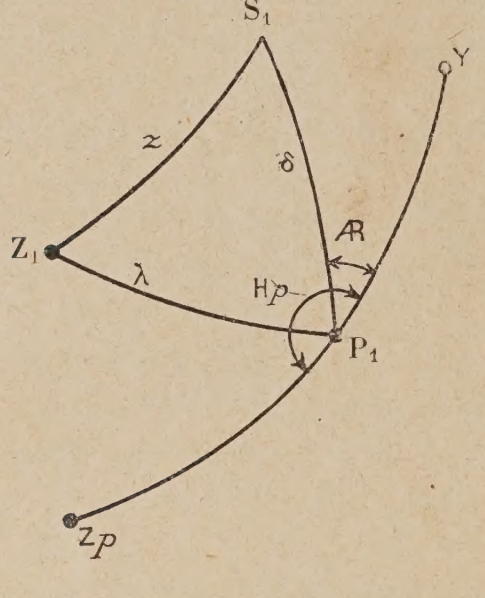
rigoureusement une droite, mais l'élément, à peu près rectiligne d'un cercle de tous les points duquel des observateurs auraient vu le Soleil, au même instant, à la même distance zénithale que le capitaine américain. En effet, considérons l'observateur situé en A et mesurant, à l'heure moyenne H_p, la distance zénithale ZAS $= z$ du Soleil ou d'un astre quelconque. Menons la droite SC qui joint l'astre au centre de la Terre et qui rencontre le globe en S_1. L'angle ZCS sera la distance zénithale géocentrique ou z. Cela posé, faisons tourner la figure autour de la droite CS. Le point A décrira sur le globe un petit cercle dont le pôle sera s, et dont le rayon s A sera l'arc qui mesure l'angle z (*fig.* 105).

Dans ces conditions, soient (*fig.* 105 *bis*) sur la sphère céleste S l'astre observé à l'instant H_p du chronomètre (donnant l'heure de Greenwich), Z_p le zénith de ce point, z la distance zénithale de l'astre S. On connaît PS $= \delta$ distance polaire de l'astre ; γ PS $= A$; γ PZ_p $= H^p$; on sait de plus que le point inconnu de zénith Z

où se trouve le navire est situé sur un petit cercle décrit de S comme centre avec z comme rayon sphérique.

Joignons les points P, S, Z, Z_p au centre de la Terre et soient P_1, S_1, Z_1, Z_{p_1} les points où les droites CP, CS, CZ, CZ_p percent la surface de la Terre. Le point Z_{p_1} sera Paris, le point S_1 sera connu puisque l'on connaît $P_1 S_1 = \delta$ et l'angle $S_1 P_1 Z_{p_1} = H_p - AR$;

Fig. 105 *bis*.



le point Z_1 sera sur un cercle décrit de S_1 comme centre avec z comme rayon. Ce cercle, lieu des points pour lesquels l'observation de l'astre S à l'instant où elle a été faite à bord donnerait la distance zénithale z, est, comme nous l'avons déjà vu, le *cercle de hauteur*. L'observateur, ou le navire, se trouve quelque part sur ce cercle. Une seule observation ne donne rien de plus.

On ne saurait tracer ce cercle sur une projection de Mercator; sa transformée est bien trop compliquée. On peut le construire par points à l'aide de son équation.

Supposons le cas le plus fréquent où l'on opère avec le Soleil.

Soient λ et L les coordonnées inconnues de l'observateur A [1]; l'angle horaire du Soleil à l'instant H_p sera $H_p - e + L$. On aura donc l'équation

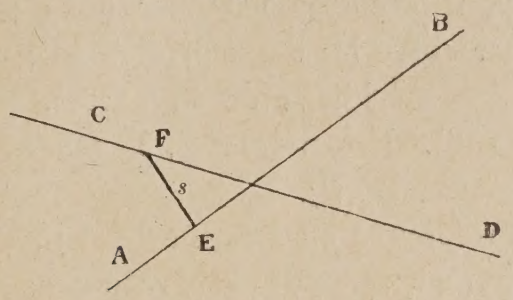
$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos(H_p - e + L).$$

---

[1] On donnera à L le signe convenable, suivant la position approchée du navire donnée par l'estime, par rapport au méridien initial.

Elle s'appliquera à tous les points de la circonférence susdite, pourvu qu'on y regarde λ et L comme des coordonnées courantes. Cela posé, on donnera à λ une série de valeurs arbitraires, distantes de 10′ en 10′, à commencer par la colatitude approchée que fournit l'estime, et l'on calculera les L correspondants à l'aide de cette équation. Les points ainsi déterminés et portés sur la carte marine seront sur la courbe qui y représente le cercle susdit, et, comme il s'agit d'une courbe à grand rayon, de 30, 40, 50, ... degrés, cette

Fig. 106.



petite portion de courbe se confondra sensiblement avec la tangente AB (*fig.* 106).

Pour tracer cette tangente sur la carte, deux points, calculés comme nous venons de le dire, suffiront. Elle porte le nom de *droite de hauteur*. Le navire doit se trouver quelque part sur cette portion de droite un peu prolongée des deux bouts.

Il est facile de voir qu'elle sera perpendiculaire à la direction azimutale où l'on a observé le Soleil. Cette direction est en effet A_s (*fig.* 105), trace horizontale du vertical du Soleil et rayon du cercle de hauteur. Par conséquent, si l'on a déterminé l'azimut du Soleil (au compas de relèvement fonctionnant, non plus comme théodolite, mais comme une boussole dont on connaîtrait bien la variation), on pourra se contenter de calculer un point de la droite de hauteur et de mener, par ce point, une droite perpendiculaire à cette direction azimutale.

Si, quelque temps après, à l'heure H'_p, le navire ayant fait le chemin $\Delta\lambda$ en colatitude et ΔL en longitude, on observe de nouveau le Soleil par la distance zénithale z', on aura pareillement :

$$\cos z' = \cos\lambda \cos\delta' + \sin\lambda \sin\delta' \cos(H'_p - e' + L),$$

λ et L étant encore, sur la carte, les coordonnées courantes d'un

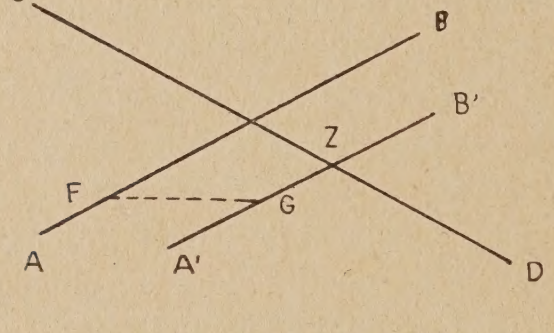
second cercle de hauteur. Remplaçons-le pareillement par une droite de hauteur CD. Dès lors, à l'heure H_p, le navire a dû se trouver quelque part sur AB; à l'heure H'_p sur CD, et dans l'intervalle, il a décrit à la surface du globe une petite droite s, sous l'angle de route V, éléments qu'on déduit de $\Delta\lambda$, ΔL et de la colatitude de l'estime λ, par les formules (page 307)

$$s \cos V = \Delta\lambda,$$
$$s \sin V = -\Delta L \sin\lambda.$$

La question peut donc se ramener à ce petit problème de Géométrie : mener entre les deux droites AB, CD, sous un angle donné V (avec les méridiens de la carte), une droite EF de longueur s (*fig.* 106). Les points E, F seront les positions du navire aux heures H_p, H'_p (1).

On opère de préférence en transportant la première droite de hauteur à l'instant de la seconde observation, au moyen de l'estime. Pour cela, après avoir obtenu les deux droites de hauteur AB et CD, cette dernière correspondant à la seconde observation, par un point quelconque de AB, on porte la route FG parcourue

Fig. 107.



dans l'intervalle de temps entre les deux déterminations. Par G, on mène une parallèle à AB; on a ainsi le transport de la première droite de hauteur à l'instant de la seconde observation; l'intersection Z de A′ B′ et de CD sera la position du navire à cet instant.

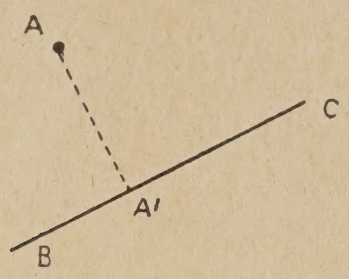
Mais on peut aussi se servir d'une observation unique, en se basant sur la remarque que nous avons déjà faite, que chaque

(1) Il est à remarquer que la seconde équation de la page 338, relative à la méthode de Lalande, ne se confond pas avec celle de la page 343 et ne représente pas un cercle sur la sphère quand l'observateur s'est déplacé.

droite de hauteur est perpendiculaire au vertical d'observation dont on peut avoir l'azimut au moyen du compas de relèvement.

Supposons que l'on observe un astre dans la direction de la marche du navire, en avant ou en arrière, la droite de hauteur sera perpendiculaire à la marche. Si A est le point estimé, BC la

Fig. 108.



droite de hauteur, les navires appellent *point rapproché* le pied A′ de la perpendiculaire abaissée de A sur BC et le considèrent comme la position probable du navire à l'instant de l'observation qui a servi au tracé de la droite de hauteur.

Une observation d'astre dans un azimut perpendiculaire à la direction de marche du navire donnera une droite parallèle à cette direction de marche, ce qui, dans le cas de l'entrée dans un estuaire, par exemple, fournira un élément très utile.

Procédé Marcq-Saint-Hilaire.

La méthode des droites de hauteur est certainement aujourd'hui la plus simple et la plus exacte. Elle a été rendue très pratique par les travaux de l'amiral Marcq-Saint-Hilaire et est employée sous cette dernière forme à bord de tous les navires de l'État.

On utilise les observations faites à quelque heure du jour ou de la nuit que ce soit, en employant indifféremment le Soleil ou les étoiles. En outre, la première observation faite permet déjà d'obtenir un premier point rapproché très voisin de la réalité, qui peut suffire à la rigueur pour assurer la navigation.

Le principe de la méthode consiste à calculer la hauteur ou la distance zénithale qu'on aurait observée si l'on avait opéré au point estimé et à comparer cette valeur à celle réellement observée. La différence des deux valeurs donne la distance à

laquelle on se trouve du point estimé. En portant cette différence dans le sens convenable, à partir du point estimé, sur la direction azimutale de l'astre, on obtient un premier point rapproché très voisin de la réalité. Sa perpendiculaire à la direction azimutale menée par ce point est la droite de hauteur. Cette droite, transportée par l'estime à midi, donne par sa rencontre avec la latitude méridienne, le point de midi.

On peut évidemment en opérant de nuit déterminer trois droites à l'aide de trois étoiles, en ramenant les deux premières observations à la troisième par un transport de droites. Le point se trouvera au centre de gravité du triangle d'erreur, si les trois droites ne concourent pas au même point, ce qui est le cas général.

CHAPITRE XV.

DÉTERMINATION DES LONGITUDES EN MER.

La détermination de la longitude se ramène toujours au même problème : comparer au même instant l'heure locale à l'heure du méridien origine.

On le résout en mer, par le transport de l'heure sur laquelle sont réglés les chronomètres, au départ. Mais, comme nous l'avons vu déjà, il y a toujours des incertitudes dans les marches et bien que l'on ait soin, pour les très longs voyages, d'emporter plusieurs chronomètres, il est indispensable, toutes les fois que cela est possible, de rectifier ces chronomètres.

L'emploi de la télégraphie sans fil pour l'envoi en mer de l'heure du méridien initial a, aujourd'hui, donné à la solution de ce problème, autrefois si délicat, une physionomie toute nouvelle.

Voyons tout d'abord, comment autrefois, ou même aujourd'hui en l'absence d'antenne réceptrice, ou hors de portée des signaux horaires, on rectifiait ou on rectifierait les chronomètres.

Heure du méridien initial par relèvement.

Lorsqu'on fait relâche dans un port dont la situation géographique est bien connue, par des observations de hauteur du Soleil prises à terre, à l'aide d'un horizon artificiel, le navigateur détermine l'heure locale avec précision et par suite l'heure de Paris. En la comparant avec celle que donnent ses chronomètres, il obtient la correction qu'il faut leur appliquer dans le reste du voyage.

Lors même qu'on ne fait que passer à proximité d'un point

connu, il est facile de déterminer, par des relèvements au compas, la position exacte du navire et sa longitude. Des hauteurs du Soleil prises immédiatement après, à bord, donnent le même résultat que si l'on avait opéré à terre.

On voit combien il est utile de fixer très exactement, surtout en longitude, la position de ces points qui se trouvent en vue sur les trajets les plus fréquentés et combien surtout cela était indispensable avant l'utilisation de la T. S. F. Le Bureau des Longitudes a fait déterminer avec précision, par des observations astronomiques, la longitude de certains points principaux. Le transport des chronomètres, à partir de ces points, le long d'une côte étendue, donne ensuite leur différence de longitude avec une foule de points moins importants. En employant en outre les câbles sous-marins, qui permettent de déterminer d'une façon très précise les différences de longitude, on était arrivé ainsi à multiplier les données géographiques qui peuvent être utiles aux navigateurs.

Heure du méridien initial par signaux horaires (T. S. F.).

L'envoi par T. S. F., à des instants connus des navigateurs, de l'heure d'un premier méridien est évidemment, pour tout navire pourvu d'un appareil récepteur, le moyen le plus simple, en même temps que le plus précis, pour régler et vérifier les chronomètres du bord.

Des conventions internationales ont réglementé les envois de signaux horaires des diverses stations radiotélégraphiques de façon à éviter toute confusion. Nous donnerons, comme exemple de la méthode, l'envoi de l'heure par la station de la Tour Eiffel.

La station envoie des signaux de nuit et des signaux de jour; la longueur d'onde employée est de 2200^{m} environ.

Signaux de nuit. — L'heure est transmise chaque nuit à $23^{h}45^{m}$, $23^{h}47^{m}$ et $23^{h}49^{m}$ (temps légal ou de Greenwich). Pour cela, quelques minutes avant $23^{h}45^{m}$, la station de la Tour est mise en relation avec l'Observatoire de Paris, de telle sorte que les appareils d'émission des ondes puissent être actionnés de l'Observatoire au moyen de relais intermédiaires.

A $23^h\,43^m$, l'astronome de service transmet les mots : Observatoire de Paris, de façon à fixer les navigateurs sur l'heure du premier méridien qu'ils recevront. A $23^h\,44^m$, l'astronome transmet une série de signaux d'avertissement qui consiste en une suite de traits : — — — — — — — —
— — — — — — — — —

Ces signaux prennent fin à $23^h\,44^m\,53^s$ environ.

A $23^h\,45^m\,0^s$ (temps moyen de Greenwich), une pendule de l'Observatoire ferme elle-même le circuit de transmission, au moyen d'un dispositif approprié, pendant un temps égal à $\frac{1}{4}$ de seconde environ, ce qui produit un point un peu long; c'est le premier signal horaire.

Les deux signaux suivants de $23^h\,47^m$ et $23^h\,49^m$ sont envoyés de la même manière, sauf qu'ils sont annoncés chacun, une minute avant, le second par une série de traits séparés les uns des autres par deux points — ·· — ·· — ·· —, le troisième par une série de traits séparés par trois points — ··· — ··· — ··· —. La nature des signaux d'avertissement transmis avant chacun des trois signaux horaires permet d'éviter toute confusion.

L'emploi de la T. S. F. a rendu, comme on le voit, à la navigation, le service le plus considérable. A l'étude de ces méthodes, à leur réalisation pratique, à leur divulgation et à leur réglementation se rattache, comme nous l'avons dit déjà, le nom du général Ferrié, directeur du Service radiotélégraphique militaire, qui a réalisé dans toutes ces questions les plus grands progrès.

Heure du méridien initial par les distances lunaires.

Quand tous ces éléments font défaut, il reste au marin une dernière ressource, celle de la détermination de l'heure par les distances lunaires. Elle ne s'emploiera plus guère aujourd'hui, car il deviendra bien rare qu'un navire ne puisse recevoir et utiliser les signaux horaires. Nous l'exposerons cependant en raison de l'usage qui en a été fait jadis.

La *Connaissance des Temps* permet de calculer, un jour donné, de trois en trois heures par exemple, en temps du méridien initial, la distance angulaire de la Lune soit au Soleil

soit à une planète où à une étoile visible en même temps qu'elle. Ayant établi un tableau tel que celui-ci, à la date du 12 mai 1880,

Heure de Paris.	Distance de la ☾ au ☉.
h	° ′ ″
0.....	35.11.36
3.....	36.32.30
6.....	37.53.27
9.....	39.14.27
12.....	40.35.31
15.....	41.56.38
18.....	43.17.48
21.....	44.39. 3

si, le même jour, on mesure en un lieu quelconque, au sextant, la distance de la Lune au Soleil à $6^h\,0^m\,0^s$ heure locale, et qu'on trouve $39^o\,14'\,27''$, on en conclura que l'heure correspondante de Paris était $9^h\,0^m\,0^s$. La longitude de la station était donc $21^h\,0^m\,0^s$. L'exactitude de ce procédé est fondée sur la rapidité des mouvements de la Lune. Le tableau ci-dessus montre que, de 6^h à 9^h, la distance des deux astres varie de $1^o\,21'\,0''$, ce qui fait $\frac{1}{2}$ seconde d'arc par seconde de temps. Si donc la distance mesurée est en erreur de $0'',5$, l'heure conclue sera en erreur de 1^s. En mer, dans des circonstances favorables, on mesure ces distances à $0',1$ ou à $6''$ près : l'heure du méridien initial peut donc être obtenue par ce procédé à 12^s près.

Si l'on évalue la longitude conclue en arc, le rapport $\frac{1^s}{0'',5}$ devient $\frac{15}{0.5} = 30$ à peu près. Ainsi toute erreur sur la distance observée produit une erreur trente fois plus forte sur la longitude.

Observation des distances lunaires.

L'observateur, maintenant le sextant dans le plan des deux astres, pointe sur l'un d'eux avec la lunette et amène dans le champ l'image doublement réfléchie de l'autre. Les deux images étant placées entre les fils parallèles au limbe, on met les deux disques en contact par leurs bords et l'on note l'heure. Il y a là une condition essentielle : c'est d'affaiblir l'image la plus brillante par l'interpo-

sition de verres obscurcissants, de manière à les ramener toutes deux à la même intensité. Alors le contact des deux bords du Soleil et de la Lune s'effectue avec une véritable précision. Si, au lieu du sextant, on emploie le cercle de Borda, la mesure de la distance sera indépendante de toute excentricité; par des observations croisées, on élimine l'erreur d'origine des divisions, c'est-à-dire du point de parallélisme des miroirs; par la répétition, on supprime les erreurs de division et l'on atténue celle du pointé. Néanmoins, c'est là la plus difficile de toutes les observations astronomiques; il faut une adresse particulière et une grande habitude pour maintenir les deux astres dans le champ de la lunette, malgré les oscillations du navire.

Théoriquement, la seule difficulté de cette méthode consiste en ce que les distances lunaires, observées à la surface de la Terre, ne sont pas directement comparables à celles de la *Connaissance des Temps* qui sont calculées pour le centre de notre globe. Il faut donc les ramener à ce point par un changement d'origine dans les coordonnées, et en tenant compte de la réfraction. En outre, l'observation donne la distance des bords, tandis que la *Connaissance des Temps* donne celle des centres. De là une nouvelle réduction, qui consiste à ajouter, à la distance des bords, les demi-diamètres apparents des deux astres, en tenant compte de l'effet particulier de la réfraction.

Soient donc D_1 cette distance des centres observée d'un point M de la surface du globe, z_1 et z'_1 les distances zénithales apparentes des deux astres S_1 et L_1 telles qu'on les observerait du même point M, (A) leur différence d'azimut, Z le zénith en M, et construisons le triangle sphérique $ZS_1 L_1$, dont les sommets seront les projections des deux astres et du zénith sur la sphère céleste. Si l'on passe du point M au point O, situé (en supposant la Terre sphérique) sur la verticale MZ, les astres ne sortiront pas de leurs verticaux primitifs ZML_1, ZMS_1, et se projetteront seulement en d'autres points L et S sur les côtés ZL_1, ZS_1 de ce triangle. Leur distance $L_1 S_1$, vue du point M, que nous désignerons par D_1, deviendra la distance LS vue du centre de la Terre, distance que nous désignerons par D. Dans le premier cas, les côtés ZL_1, ZS_1 du premier triangle seront les distances zénithales apparentes des deux astres, affectées de la réfraction; dans le second triangle, les côtés ZL, ZS en seront les

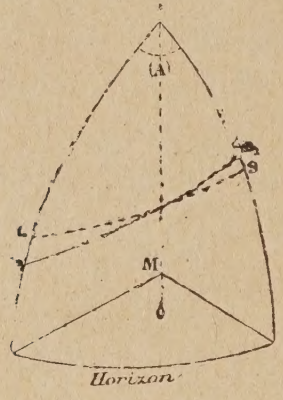
distances vraies et géocentriques. Ces deux triangles, qui ont l'angle (A) commun, nous donnent

$$(1) \qquad \cos D_1 = \cos z_1 \cos z'_1 + \sin z_1 \sin z'_1 \cos(A),$$

$$(2) \qquad \cos D = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos(A).$$

Les distances zénithales z, z', z_1, z'_1 sont connues; il suffira donc d'éliminer cos (A) entre ces deux équations pour avoir D,

Fig. 109.



c'est-à-dire la distance géocentrique des deux astres, celle qu'on doit comparer aux distances calculées d'avance au moyen de la *Connaissance des Temps*, pour obtenir l'heure de Paris.

Évidemment la difficulté de ces calculs ne gît pas dans la combinaison des équations (1) et (2), encore plus facile à résoudre que celles du problème de Douwes, mais dans le détail des corrections de réfraction et de parallaxe qu'il faut appliquer ici. Nous allons voir, en effet, que ces corrections doivent être obtenues avec plus de précision qu'on n'en apporte d'ordinaire dans les calculs d'Astronomie nautique, et qu'on ne saurait se dispenser d'y tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre.

Conditions d'exactitude.

Notre attention doit se porter en premier lieu sur l'erreur commise dans la mesure de D_1. En différentiant (1) et (2) par rapport à D, D_1 et (A), puis, en divisant les résultats membre à membre, on trouve

$$dD = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1} \frac{\sin D_1}{\sin D} dD_1.$$

Pour le Soleil, dont la parallaxe est très faible, la réfraction l'emporte sur la parallaxe; aussi avons-nous placé S au-dessous de S_1 dans la figure précédente (c'est l'inverse pour la Lune). Le rapport $\frac{\sin z}{\sin z_1}$ est donc > 1, mais à peine différent de l'unité. De 10° à 70° de distance zénithale, il varie de 1,000254 à 1,000257. Le rapport analogue pour la Lune est plus petit que 1, et varie de 1 à 0,982. Il en est de même de $\frac{\sin D}{\sin D_1}$; sa variation est encore plus faible. Concluons de là qu'une petite erreur dD_1, commise dans la mesure de la distance apparente, se reportera avec son signe et presque sans altération (tout au plus de un ou deux centièmes) sur la distance conclue D. Si donc on négligeait, au commencement du calcul, d'apporter quelque petite correction à D_1, il serait permis de l'appliquer après coup à D.

Considérons en second lieu les erreurs des distances zénithales; pour cela, exprimons $D - D_1$ en fonction des différences $z - z_1$, $z' - z'_1$, et, pour abréger, désignons-les par les lettres x, α, α'. Remplaçons, dans l'équation (2), D, z, z' par $D_1 + x$, $z_1 + \alpha$, $z'_1 + \alpha'$; développons les sinus et cosinus en traitant x, α, α' comme de petites quantités dont les cosinus peuvent être remplacés par 1 et les sinus par les arcs correspondants. Il viendra ainsi

$$\begin{aligned}\cos D_1 - x \sin D_1 = {} & (\cos z_1 - \alpha \sin z_1)(\cos z'_1 - \alpha' \sin z'_1) \\ & + (\sin z_1 + \alpha \cos z_1)(\sin z'_1 + \alpha' \cos z'_1)\cos(A).\end{aligned}$$

Effectuons les multiplications en omettant les carrés et les produits deux à deux de x, α, α'. Après avoir supprimé les termes qui se détruisent en vertu de l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned}x \sin D_1 = {} & \alpha[\sin z_1 \cos z'_1 - \cos z_1 \sin z'_1 \cos(A)], \\ & + \alpha'[\sin z'_1 \cos z_1 - \cos z'_1 \sin z_1 \cos(A)].\end{aligned}$$

Or le triangle $ZS_1 L_1$ donne

$$\begin{aligned}\sin D_1 \cos S_1 &= \sin z_1 \cos z'_1 - \cos z_1 \sin z'_1 \cos(A). \\ \sin D_1 \sin L_1 &= \sin z'_1 \cos z_1 - \cos z'_1 \sin z_1 \cos(A).\end{aligned}$$

La relation précédente se réduit donc à

$$x = \alpha \cos S_1 + \alpha' \cos L_1.$$

Ainsi la réduction x de la distance apparente à la distance géocentrique dépend uniquement de α et de α', c'est-à-dire des corrections de réfraction et de parallaxe $z - z_1$, $z' - z'_1$, et elle est moindre que leur somme. Toute erreur sur z et z_1 à la fois, ou sur z' et z'_1, sera sans influence, à moins qu'elle ne soit assez grande pour fausser notablement les angles L_1 et S_1, ce qui est inadmissible. Il faut donc calculer avec soin les corrections susdites de réfraction et de parallaxe, et ne pas oublier que toute erreur finale commise sur D se reportera sur la longitude conclue avec le facteur 27, s'il s'agit d'une distance de la Lune à une étoile, et le facteur 29 ou 30, s'il s'agit d'une distance luni-solaire.

Cette même relation conduit à deux autres conséquences importantes. La première est qu'il n'est pas nécessaire de mesurer les distances zénithales apparentes z_1 et z'_1 des deux astres : il suffit de les calculer avec les éléments de l'estime (à moins que le Soleil ne soit bien placé pour donner l'heure du bord). Lorsqu'on se décide à les observer, il faut qu'elles répondent à l'instant où l'on mesure la distance D_1. Trois observations sont alors nécessaires pour déterminer, en même temps, la distance et les hauteurs. S'il n'y a qu'un seul observateur, il devra mesurer les hauteurs une première fois, puis la distance, enfin les deux hauteurs une seconde fois, afin que la moyenne des hauteurs soit sensiblement contemporaine de la distance.

Effet de la réfraction sur les disques du Soleil et de la Lune.

La réfraction élève l'astre dans l'angle dièdre formé par les deux verticaux qui le comprennent. Elle diminue ainsi le diamètre horizontal d'une très petite quantité que nous négligerons. Mais, par la différence des réfractions qui répondent au centre et aux bords, elle aplatit un peu le disque dans le sens vertical et lui donne une figure elliptique. Il est facile de tirer des tables de réfraction la quantité e dont le demi-diamètre vertical est ainsi diminué, et l'on aura, à très peu près, pour le demi-diamètre situé dans la direction de la ligne des centres $S_1 L_1$, sur laquelle nous admettrons que le contact des disques apparents s'opère,

$$\frac{1}{2}\Delta_1 - \varepsilon \cos^2 S_1,$$

S_1 est l'angle du triangle ZS_1L_1, qu'on obtiendra par la formule

$$\cos z'_1 = \cos z_1 \cos \Delta_1 + \sin z_1 \sin \Delta_1 \cos S_1,$$

en calculant à trois décimales.

Dans l'exemple suivant :

$$z_1 = 77^\circ 42', \qquad z'_1 = 45^\circ 25', \qquad \Delta_1 = 38^\circ 42'.$$

On a de plus

$$\frac{1}{2}\Delta_1 = 15'51'',4, \qquad \varepsilon = 6'',1,$$

$$\frac{1}{2}\Delta'_1 = 14'54'',8, \qquad \varepsilon' = 0'',5.$$

D'après cela, le calcul des rayons réfractés se réduit à

$\log \varepsilon$	0,786	$\log \varepsilon'$	9,726
$\log \cos^2 S_1$	9,886	$\log \cos^2 L_1$	9,555
	0,672		9,281
Nombre	4'',7	Nombre	0'',2
$\frac{1}{2}\Delta_1$	15'.51'',4	$\frac{1}{2}\Delta'_1$	14'.54'',8
$\frac{1}{2}\Delta'$ réfracté	15'.46'',7	$\frac{1}{2}\Delta'_1$ réfracté	14'.54'',6

Ce sont là les demi-diamètres qu'il faut ajouter à la distance observée des bords pour avoir celle des centres.

Résolution des équations du problème.

En premier lieu, il est bien aisé de traiter directement ces équations en passant des logarithmes aux nombres et réciproquement. De (1) on tire la valeur de log cos (A) qu'on porte dans (2), et l'on obtient ainsi log cos D et par suite D. En calculant à sept décimales, on aura D à la seconde près, à moins que D ne soit très petit, cas exclu d'avance.

En second lieu, on peut rendre (1) et (2) calculables par logarithmes en posant $z_1 - z'_1 = \beta_1$, $z - z' = \beta$; elles prennent alors

la forme

$$\sin\frac{1}{2}(D_1-\beta_1)\sin\frac{1}{2}(D_1+\beta_1)=\sin z_1\sin z'_1\sin^2\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}(D-\beta)\sin\frac{1}{2}(D+\beta)=\sin z\sin z'\sin^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Divisons membre à membre; il vient

$$\sin\frac{1}{2}(D-\beta)\sin\frac{1}{2}(D+\beta)=\sin^2\frac{1}{2}D-\sin^2\frac{1}{2}\beta$$
$$=\frac{\sin z\sin z'}{\sin z'\sin z'_1}\sin\frac{1}{2}(D_1-\beta_1)\sin\frac{1}{2}(D_1+\beta_1).$$

On introduit un angle auxiliaire φ en posant

$$\sin^2\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{tang}^2\varphi=\frac{\sin z\sin z'}{\sin z_1\sin z'_1}\sin\frac{1}{2}(D_1-\beta_1)\sin\frac{1}{2}(D_1+\beta_1),$$

et l'on a finalement

$$\sin\frac{1}{2}D=\sin\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{séc}\,\varphi.$$

C'est la formule de Borda. En voici l'application à l'exemple suivant :

1880, mai 12, par $L=21^h$, $\lambda=45^o$, à 6^h temps moyen du navire, la distance des bords du Soleil et de la Lune était de $38^o\,11'\,37''$. La mesure des distances zénithales apparentes a donné $z_1=77^o\,41'\,37''$, $z'_1=45^o\,25'\,29''$ (bar. $0^m,76$; therm. $+10^o$). Calculer la longitude.

Pour l'heure de Paris approchée, $H_p=9^h$, la *Connaissance des Temps* donne

$$\frac{1}{2}\Delta=15'\,51'',4,\qquad \pi'=8'',86,$$

$$\frac{1}{2}\Delta'=14'\,45'',1,\qquad P=54'\,2'',9.$$

On en déduit les distances zénithales géocentriques :

Soleil.		Lune.	
z_1	$77^o.41'.37''$	z'_1	$45^o.25'.20''$
p	$-\quad 8,6$	p'	$-\ 38.34,5$ (1)
ρ	$+\ 4.21,5$	ρ'	$+\quad 59,2$
z	$77.45.50$	z'	$44.47.54$

(1) C'est pour le calcul exact de cette parallaxe qu'il faut tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre.

Calcul de la distance apparente des centres.

Dist. des bords	38.11,37
$\frac{1}{2}\Delta_1$ réfracté	15,47
$\frac{1}{2}\Delta'$ réfracté	15,55
D_1 distance des centres	38.42,19

Formule de Borda.

z_1	$77^{\circ}.41'.37''$	z	$77^{\circ}.45'.50''$
z'_1	45.25.29	z'	44.47.54
β_1	32.16. 8	β	32.57.56
D_1	38.42.19	$\frac{1}{2}\beta$	16.28.58
$D_1-\beta_1$	6.26.11	$\log\sin\frac{1}{2}\beta$	9,4529009
$D_1+\beta_1$	70.58.27	$\log\sin^2\frac{1}{2}\beta$	8,9058016
$\frac{1}{2}(D_1-\beta_1)$	3.13. 5,5		
$\frac{1}{2}(D_1+\beta_1)$	35.29.13,5		
$\log\sin z$	9,9900201		
$\log\sin z'$	9,8479510		
$C^t\log\sin z_1$	0,0100957		
$C^t\log\sin z'_1$	0,1473194		
	9,9953862		
$\log\sin\frac{1}{3}(D_1-\beta_1)$	8,7492613	$\log\sec\varphi$	0,0731501
$\log\sin\frac{1}{2}(D_1+\beta_1)$	9,7638168	$\log\sin\frac{1}{2}\beta$	9,4529009
$C^t\log\sin^2\frac{1}{2}\beta$	1,0941982	$\log\sin\frac{1}{2}D$	9,5260510
$\log\tan^2\varphi$	0,6026625	$\frac{1}{2}D$	$19^{\circ}.37'.11'',2$
$\log\tan$	9,8013312	D	$39^{\circ}.14'.22'',4$
φ	$32^{\circ}19'46'',1$		

Interpolation.

C. d. T. à 9^h.....	$39°.14'.27''{,}0$	$\log \frac{3^h}{\text{diff.}}$	0,3465
Diff.....	$-4{,}6$		
H_p.....	$8^h.59^m.49^s{,}8$	$\log 4''{,}6$.....	$\frac{0{,}6628}{1{,}0093}$
H.....	6. 0. 0	Nombre.....	$10^s{,}2$
L.....	20. 0.10		

Navigation sur la ligne la plus courte.

La loxodromie n'est pas la ligne la plus courte d'un point à un autre. Cette dernière est l'arc de grand cercle qui unit ces deux points. La différence n'est pas à dédaigner à une époque où les frais de navigation à vapeur sont énormes et où les exigences, en fait de communications rapides, vont toujours en croissant.

La traversée de Brest à New-York, par exemple, peut être abrégée ainsi de 160 milles. Il suffit de connaître l'azimut de New-York sur l'horizon de Brest, c'est-à-dire de résoudre le trïangle sphérique compris entre le pôle et ces deux points, triangle ayant pour angle au pôle leur différence de longitudes, et pour côtés leurs colatitudes.

On part de Brest dans cet azimut. Le lendemain, on prend la position nouvelle du navire, déterminée par le point de midi, pour point de départ et l'on détermine de nouveau l'azimut fourni par le nouveau triangle sphérique, en sorte que la route se compose réellement de petits arcs de loxodromie situés le long de l'arc de grand cercle qui joint les points extrêmes.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE (1er FASCICULE)

Pages.

Préface de la Première Édition V

Préface de la Seconde Édition VII

Symboles et Conventions XI

Introduction 1

Distinction fondamentale entre le monde solaire et l'univers 1
Le système solaire vu de dehors 5
Le système solaire vu de la Terre 8
Voûte céleste 10
Illusion provenant d'un mouvement de translation rectiligne 13
Illusion provenant d'un mouvement de rotation 15
Illusion provenant du mouvement de la circulation de la Terre autour du Soleil 17
Conception de l'univers dans l'antiquité 21
Classification des étoiles et mesure de leur distance 23
Mouvement de translation du système solaire 27
Mouvements propres des étoiles 29

PREMIÈRE PARTIE.

Astronomie sphérique. — Description des instruments. — Théorie des erreurs. — Géodésie et géographie mathématique 31

Livre premier. — **Théorie du mouvement diurne du ciel** 33
Description du mouvement diurne apparent du ciel 33

Chapitre I. — *Systèmes de coordonnées usités en Astronomie* 36

Coordonnées locales des étoiles 36
Mesure du temps. Jour sidéral. Heure 37
Coordonnées uranographiques 38
Coordonnées géographiques 40

Pages.

Relations mutuelles de ces trois systèmes de coordonnées sphériques... 41
Usage des globes céleste ou terrestre 46
Coordonnées zénithales 49

CHAPITRE II. — *Transformation des coordonnées* 52

Transformation par déplacement de l'origine 52
Coordonnées sphériques. Manière de représenter une direction ou un plan 53
Condition pour que trois points de la sphère, donnés par leurs coordonnées angulaires, soient sur un arc de grand cercle 55
Changement de direction de l'axe des coordonnées sphériques 57
Application de ces formules aux coordonnées célestes 58
Trigonométrie sphérique 60
Formules calculables par logarithmes 60
Formules de Borda 60
Analogies de Delambre et de Neper 62
Triangles rectangles 64
Résolution des triangles quelconques 66
Excès sphérique 67
Sur les calculs trigonométriques 69
Formules différentielles des triangles sphériques 71
Développement en série des fonctions trigonométriques. Développement de Lagrange 74

CHAPITRE III. — *Théorie des instruments de mesure angulaire. Principaux organes de ces instruments* 78

Alidade à pinnules 79
Substitution des lunettes aux pinnules 80
Lunettes astronomiques 82
Mise au point. Réticule 83
Rappel de quelques notions de la théorie des lentilles 84
Verniers 87
Microscope à micromètre 88
Vis de rappel. Vis micrométrique 90
Erreurs d'excentricité; leur élimination au moyen de verniers opposés . 91
Erreurs de divison 93

CHAPITRE IV. — *Description et usage du théodolite* 96

Rectification de la ligne de visée 100
Rectification de l'axe principal. Fil à plomb. Niveau 101
Niveau à bulle d'air 102
Rectification de l'axe secondaire 106
Mesure des azimuts à l'aide du théodolite 106
Erreurs dues à une rectification imparfaite dans la détermination des azimuts 108
Mesure des distances zénithales à l'aide du théodolite 111
Erreurs dues à une rectification imparfaite dans la détermination des distances zénithales 112
Méthode de la répétition 115

Pages.
Angles horizontaux 115
Angles verticaux 117
Méthode de la réitération 119
Cercle azimutal 120

CHAPITRE V. — *Théorie de la réfraction atmosphérique* 123

Théorie de la réfraction, en tenant compte de la courbure de la Terre.. 126
Table des réfractions 135
Correction de parallaxe 138

LIVRE DEUXIÈME. — **Observatoires astronomiques** 141

CHAPITRE VI. — *Instruments et travaux d'un observatoire* 143

Pendule astronomique 143
Échappement à ancre dépendant et à repos 144
Remontoir 148
Minuterie 149
Lunette méridienne 151
Observation du passage d'un astre aux fils de la lunette 155
Erreur personnelle 159
Rectification de la lunette méridienne 160
Rectification de la collimation 161
Rectification de l'inclinaison 162
Rectification de l'azimut 163
Collimateurs 163
Corrections à apporter au passage d'un astre à la lunette méridienne... 163
Erreur d'inclinaison 171
Erreur d'azimut 172
Cercle mural 177
Rectification du cercle mural 180
Réduction au méridien 182
Détermination de la colatitude 183
Corrections instrumentales 183
Erreur personnelle de l'observateur 184
Cercle méridien. Flexion des lunettes 185
Détermination simultanée de la colatitude et des constantes de la réfraction 188
Travaux d'un observatoire 190
Équatorial 191
Sidérostat 193
Équatorial coudé 195
Cœlostat 195
Rôle des étoiles fondamentales 199
Carte photographique du Ciel 200
Organisation des travaux d'un observatoire 201

CHAPITRE VII. — *Détermination astronomique des coordonnées géographiques d'un lieu* 202

Méthode des hauteurs correspondantes 203

Pages.
Observations extraméridiennes 205
Circonstances favorables à la détermination exacte de l'heure et de la colatitude 206
Détermination de l'heure 207
Détermination de la colatitude 208
Méthode de Douwes 210
Méthode de Bessel 211
Détermination de l'orientation 212
Observations méridiennes 214
Détermination de la latitude 214
Détermination de l'heure et de la correction de pendule 216
Détermination de la longitude 217
Détermination simultanée de l'heure et de la colatitude par la méthode des hauteurs égales. Astrolabe à prisme 221
Exemples numériques. Détermination de l'heure 227
Détermination de la colatitude par des observations circumméridiennes. 229
Orientation 231

LIVRE TROISIÈME. — **Théorie des erreurs** 233

CHAPITRE VIII. — *Erreurs systématiques* 235

Recherche expérimentale d'une cause d'erreur 235

CHAPITRE IX. — *Théorie des erreurs accidentelles* 240
Les diverses catégories d'observations 240
Observations directes 241
Observations indirectes. Méthode des moindres carrés 243
Erreur moyenne des observations 247
Erreur moyenne d'une fonction quelconque de quantités d'une précision donnée 249
Erreur moyenne des solutions fournies par la méthode de Legendre 252
Exemples d'application de la méthode des moindres carrés 254
Observations conditionnelles 258

CHAPITRE X. — *Observations d'inégale précision* 263

CHAPITRE XI. — *Application du Calcul des probabilités à la théorie des erreurs* 269

Loi de probabilité des erreurs 270
Recherche de cette loi 271
Recherche empirique de la loi de probabilité des erreurs fortuites 271
Signification du paramètre h 277
Erreur probable 279
Table de probabilités 281
Applications au tir de l'artillerie 284
Sur l'application de la loi de Gauss 288
Démonstration de la méthode des moindres carrés 291
Objections qu'on fait communément à la méthode des moindres carrés. 292
Conclusion 297

Pages.

LIVRE QUATRIÈME. — **Navigation** 299

CHAPITRE XII. — *Navigation par estime* 300

Mesure de la vitesse. Loch et ampoulette 300
Boussole 303
Loxodromie et problèmes de route 306
Usage des cartes marines 309

CHAPITRE XIII. — *Instruments de la navigation astronomique* 312

Le sextant 313
Rectification du sextant 315
Mesures des hauteurs égales 317
Hauteurs observées à la mer 317
Degré de précision d'une mesure au sextant 318
Dépression de l'horizon de la mer 319
Chronomètres 320
Échappement libre à ressort 321
Réglage des chronomètres 324
Influence de la température. Compensation 325
Conduite des chronomètres à la mer 329
La *Connaissance des Temps* 329

CHAPITRE XIV. — *Problèmes de la navigation astronomique* 332

Détermination de la latitude par une culmination 333
Détermination de l'heure et de la longitude 334
Azimut. Orientation 335
Variation du compas 336
Discussion de cette méthode 336
Détermination simultanée de l'heure et de la colatitude. Problème de Douwes. Solution de Lalande 337
Influence des erreurs d'observation 339
Droites et cercles de hauteur 340
Procédé Marcq-Saint-Hilaire 343

CHAPITRE XV. — *Détermination des longitudes en mer* 347

Heure par le relèvement de points terrestres connus 347
Heure du méridien origine par l'envoi de signaux horaires (T.S.F.) 348
Heure du méridien origine par les distances lunaires 349
Observation des distances lunaires 350
Conditions d'exactitude 352
Effet de la réfraction sur les disques du Soleil et de la Lune 354
Résolution des équations du problème 355
Navigation par la ligne la plus courte 358

TABLE DES MATIÈRES 360

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
76837-26

Astron.
F.
214746
Author Faye, H.
Title Cours d'astronomie et de géodésie, Part 1
1

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU